LYCEE MED ALI	SERIE 1	$4^{ème}$ MATH
ANNEE SCOL 2011 / 2012		FARHAT MOHAMED

Exercice 1

On donne un plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ et un réel θ dans $]-\pi,\pi[$

On pose $z=\frac{1}{2}(1+e^{i\theta})^2$

1. a) Calculer $(1+e^{i\theta})e^{-i\frac{\theta}{2}}$,en déduire que $\arg(1+e^{i\theta})\equiv\frac{\theta}{2}[2\pi]$

   b) Déterminer $|z|$ et arg(z)

   c) Représenter dans le plan P l'image du nombre complexe z pour $\theta=\frac{\pi}{3}$

2. On pose M le point d'affixe z et A le point d'affixe 1, N le projeté orthogonal de A sur la droite (OM)

   a) Déterminer et construire l'ensemble E des points N lorsque θ varie.

   b) Calculer HM

3. Donner une construction (point par point) de l'ensemble E' des points M pour $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ puis pour $\theta\in\left]-\pi,-\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$. Tracer E'.

Exercice 2

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : 1, $-\sin\alpha+i\cos\alpha$ et $-\sin\alpha-i\cos\alpha$ $\alpha\in[0.\pi]$.

1. Ecrire sous forme trigonométrique z_A, z_B et z_C.
2. Montrer que : AB = AC.
3. Déterminer en fonction de α, une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.
4. Déterminer α pour que ABC soit équilatéral.

Exercice 3

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé directe $(O,\vec{u},\vec{v})$, on associe à tout point M d'affixe z , nombre complexe non nul, le point M' d'affixe $z'=-\frac{1}{\bar{z}}$.

1- Montrer que O, M et M' sont alignés

2- Donner une relation entre argz' et arg z.

3- Montrer que $\overline{z'+1}=\frac{1}{z}(z-1)$

4- Soit ζ le cercle de centre Ω(1, 0) et passant par O. On suppose que $M\in\zeta\setminus\{O\}$.

a- Montrer que $|z-1|=1$. En déduire que $|z'+1|=|z'|$

Interpréter géométriquement ce résultat.

b- En déduire une construction géométrique du point M' à partir du point M.

Exercice 4

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère les points A et B d'affixes respectives 1 et -1 et on désigne par P' le plan P privé du point A.

Soit f l'application de P' dans P qui à tout point M de P' d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z'=\frac{z(\bar{z}-1)}{z-1}$.

b) Soit ζ le cercle de centre O et de rayon 1. Montrer que pour tout point M de $\zeta \setminus \{A\}$, on a : $f(M) = B$.

2. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
3. Soit M un point quelconque du plan privé de la droite (AB) et du cercle ζ.

On désigne par M_1 l'image de M par la symétrie orthogonale d'axe (AB) et par M' l'image de M par f.

a) On désigne par $z_{\overrightarrow{M_1M'}}$ et $z_{\overrightarrow{AM_1}}$ les affixes respectifs des vecteurs $\overrightarrow{M_1M'}$ et $\overrightarrow{AM_1}$.

Montrer que $\dfrac{z_{\overrightarrow{M_1M'}}}{z_{\overrightarrow{AM_1}}} = \dfrac{\bar{z}-z}{|z-1|^2}$. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{M_1M'}$ et $\overrightarrow{AM_1}$ sont orthogonaux.

b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{M_1M'}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont orthogonaux.

c) En déduire une construction géométrique du point M'.

Exercice 5

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-(1+\frac{1}{2}x)}{x^2}$. Déterminer D_f

1- Déterminer la limite de f en 0

2- Soit la fonction g définie par $\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ si } x \neq 0 \\ g(0) = a \end{cases}$. Déterminer le réel a pour que g soit continue en 0

Exercice 6

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

1- Déterminer un prolongement par continuité gde f en 0

2- Soit $h(x) = \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*_+$. Expliciter pour tout $x \in \mathbb{R}^*_+$. foh(x)

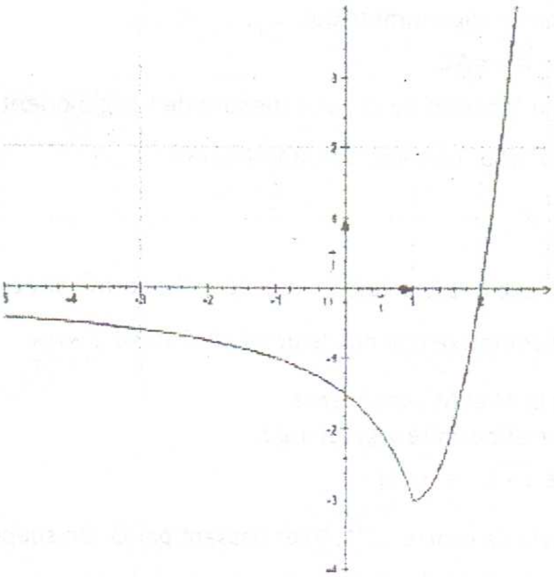
3- En déduire $\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}-1\right)$

Exercice 7

La figure ci – contre est la représentation graphique d'une fonction f définie et continue sur IR.

On note que (ζ_f) admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation y = 0, et au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées.

Pour chaque question indiquer la ou les reponses exactes :



1. Soit h une fonction définie sur IR, de même signe que f et telle que pour tout réel x, on a : $f(x) \leq h(x)$. On a alors :

a) $\lim_{-\infty} h = -\infty$

b) $\lim_{-\infty} h = 0$

c) $\lim_{+\infty} h = +\infty$

2. Soit $g = \dfrac{1}{f}$. On a alors :

a) g est définie sur IR* ; b) g est définie sur IR\{2} ; c) $\lim_{-\infty} g = -\infty$; d) $\lim_{+\infty} g = -\infty$

e) (ζ_g) admet une asymptote verticale.

3. Soit k la fonction définie sur IR* par : $k(x) = \dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$. On a alors :

a) $\lim_{+\infty} f \circ k = -3$; b) $\lim_{+\infty} k \circ f = 1$; c) $\lim_{-\infty} f \circ k = -3$; d) $\lim_{0^+} f \circ k = +\infty$; e) $\lim_{0^-} f \circ k = -\infty$