Dans les exercices suivants le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

EXERCICE N°1

1) Montrer que pour tout réel θ , $1-e^{i\theta}=-2i\ \sin\frac{\theta}{2}.e^{i\frac{\theta}{2}}$

2)a) Vérifier que pour tout nombre complexe $z\neq 1$ et pour tout entier $n\geq 2$, $1+z+z^2+...+z^{n-1}=\frac{1-z^n}{1-z}$

b) En déduire que pour tout entier $n\geq 2$, $1+e^{i\frac{\pi}{n}}+e^{i\frac{2\pi}{n}}+...+e^{i\frac{(n-1)\pi}{n}}=\frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}$

c)Montrer alors que tout entier pour $n\geq 2$, $\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+...........\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\text{cotg}\frac{\pi}{2n}$

EXERCICE N°2

Soit a un nombre complexe de module 1 et d'argument α

On désigne par A, B et C les points d'affixes $1, a$ et a^2

1) On prend $\alpha=\frac{2\pi}{3}$; trouver la forme trigonométrique de 1+a et 1-a et déduire la nature du triangle ABC

2) $\alpha\in\left]0,\pi\right[$; donner la forme trigonométrique de 1+a puis déterminer α pour que ABC soit équilatéral

EXERCICE N°3

M_1 et M_2 les points d'affixes respectifs $z_1=1+e^{i\theta}$ et $z_2=1-e^{i\theta}$ avec $\theta\in\left]0,\pi\right[$

1) déterminer le module et un argument de $z=\frac{z_1}{z_2}$ en déduire la nature du triangle OM_1M_2

2)a)Déterminer z_{M_3} pour qu'OM1M3M2 soit un rectangle

b) Déterminer θ pour que $OM_1M_3M_2$ soit un carré

3) Soit E l'ensemble des points M_1 d'affixe $z_1=1+e^{i\theta}$.

Déterminer l'ensemble E

4) On pose $z_A=1$ et $z_M=z\in\mathbb{C}^*\setminus\{1\}$ et $z_{M'}=\frac{iz}{z-1}$

a) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}+\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AM}}\right)[2\pi]$

b) En déduire l'ensemble des points M pour que O, M et M' soient alignés

EXERCICE N°4

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Soit $Z=e^{i\theta}$ avec $\theta\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$.

On considère les points M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives Z, Z^2 et Z^3.

① Montrer que les points M_1, M_2 et M_3 ne sont pas alignés.

② Soit H le point d'affixe $Z+Z^2+Z^3$.

a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$, $\frac{e^{ix}-1}{e^{ix}+1}=i\tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

b) Montrer que H est l'orthocentre du triangle $M_1M_2M_3$.

c) Déterminer la valeur de θ pour laquelle H est le centre du cercle circonscrit au triangle $M_1M_2M_3$.