Série n° 3 (E)

Exercice n° 1

1°) a) Soit $\alpha \in]0,\pi[$, Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2z\cos\alpha + 1 = 0$

b) Donner les solutions sous forme exponentielle.

2°) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'éq (E') : $z^6 - 2z^3\cos\alpha + 1 = 0$

3°) a) Soit θ un réel différent de $2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que : $\frac{z-1}{z+1} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = i\,\mathrm{cotan}(\frac{\theta}{2})$

b) utiliser ce qui précède pour donner les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E'') : $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 = 2\cos\alpha$.

Exercice n° 2 :

on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - i(1-e^{i\theta})z + (1+i)(i+e^{i\theta}) = 0$, $\theta \in \mathbb{R}$.

1°) Vérifier que $(-1+i)$ est une solution de (E). donner alors la deuxième solution de (E).

2°) Dans le plan complexe P, rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, M et M' d'affixes respectives 1, $z = 1 - ie^{i\theta}$ et $z' = 1 - ie^{-i\theta}$, $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

a) Déterminer l'ensemble des points M lorsque θ varie

b) Montrer que M et M' sont symétriques par rapport à la droite Δ d'éq $x = 1$.

c) Déterminer θ tel que AMM' est un triangle équilatéral

Exercice n° 3

$\alpha \in]0,\pi[$

I/ 1°) - Vérifier que $e^{2i\alpha} - 2i\,e^{i\alpha}\sin\alpha = 1$.

2°) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - 2e^{i\alpha}z + 2ie^{i\alpha}\sin\alpha = 0$.

3°) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^4 - 2e^{i\alpha}z^2 + 2ie^{i\alpha}\sin\alpha = 0$ (s.f. expo)

II/ Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $e^{i\alpha}$, $e^{i\alpha}-1$ et $e^{i\alpha}+1$.

1°) a - Montrer que le point A est le milieu du segment $[BC]$ et que $\overrightarrow{AB} = -\vec{u}$

b - Placer le point A dans le cas où $\alpha \in]0,\frac{\pi}{6}[$ et construire alors les points B et C

2°) a - Montrer que les points O, B et C ne sont pas alignés.

b - Montrer que $BC = 2OA$ et en déduire la nature du triangle OBC

c - Déterminer α pour que OBC soit isocèle

3°) a - Montrer que pour tout $\alpha \in]0,\pi[$ on a : $OA + OB + OC = 1 + 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$

b - Déterminer la valeur de α pour laquelle la distance $OA+OB+OC$ est maximale.

Exercice n° 4 :

soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 + (-5+4i)z^2 + (7-6i)z - 11 - 2i = 0$

1°) Montrer que l'éq (E), admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera

2°) Résoudre alors l'équation (E).

3°) Le plan P est muni d'un R.O.N.D $(O,\vec{u},\vec{v})$. on considère les points $A(1)$, $B(i)$ $C(2-i)$ et $D(3-4i)$

A tout point $M(z)$ du plan on associe le point $M'(z')$ tel que $z' = 2 - i + (z-1)^2$

a°) Déterminer les nombres complexes z tel que $z' = z$.

b°) Soit $M(z)$ un point du plan distinct de A et on pose $(\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{AM}}) \equiv \theta\ [2\pi]$

i°) Donner une relation entre AM et CM'

ii) Exprimer, en fonction de θ une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{CM'})$

iii) Determiner l'ensemble $E = \{M(z) \in P$ telque $z - 1 = \sqrt{2}e^{i\theta}$ avec $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]\}$

iiii) Determiner l'ensemble F des points M' lorsque M decrit E.

4°) soit Δ la droite d'equation : $2x + y - 1 = 0$

a) Mq $M(z) \in \Delta \iff z - 1 = y(-2+i)$ $y \in \mathbb{R}$.

b) soit $M(z)$ un point de Δ ecrire $z' - z_c$ sous forme algebrique

c) Determiner alors l'ensemble Δ' des points M' lorsque M decrit Δ.

Exercice n°5 :

soit dans $\mathbb{C}$ l'éq (E) : $z^3 + \bar{z} = 0$

1°) Montrer si z est solution de (E) alors $z = 0$ ou $|z| = 1$.

2°) on suppose que $z \neq 0$, montrer que les solutions de (E) sont les racines $4^{ième}$ de (-1). Donner alors les solutions de (E).