Exercice n°1

Le plan est muni d'un R.O.N.d $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit $a \in \mathbb{R}$ et l'équation (E)

$$(E) : z^2 + a(1-i)z - ia^2 = 0$$

1/ Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).

On notera z_1 la solution réelle et z_2 l'autre solution.

2/ On désigne par A et B les points d'affixes respectives $2+z_1$ et z_2

Soit le carré de sens direct ACBD.

2.1 Montrer que le point C est fixe.

2.2 Déterminer et construire l'ensemble des points D lorsque a varie dans $\mathbb{R}$.

Exercice n°2

1/ Soit θ un réel de l'intervalle $]0,\pi[$.

Résoudre l'équation $z^2 - 2iz - 1 - e^{2i\theta} = 0$

2/ Dans le plan complexe rapporté à un R.O.N.d $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A, M et N d'affixes respectives $-1+i$, $i+e^{i\theta}$ et $i-e^{i\theta}$ où $\theta \in]0,\pi[$

2.1 Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont orthogonaux.

2.2 Montrer que lorsque θ varie dans $]0,\pi[$, les points M et N varient sur un cercle $\mathcal{C}$ que l'on déterminera

3/1 Déterminer en fonction de θ l'aire $\mathcal{A}(\theta)$ du triangle AMN.

3.2 Déterminer les valeurs θ pour lesquelle l'aire $\mathcal{A}(\theta)$ est maximale et placer dans ce cas les points M et N sur le cercle $\mathcal{C}$

Exercice n°3

Soit $\theta \in]0,\pi[$ on considère l'équation $(E_\theta) : z^2 - 2(1+i\sin\theta)z + 2i\sin\theta = 0$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On désigne par z_1 et z_2 les solutions de (E_θ)

1/ Sans calculer z_1 et z_2 montrer que $|z_1|.|z_2| = 2\sin\theta$ et $\text{Arg}(z_1)+\text{Arg}(z_2) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

2/ Résoudre l'équation (E_θ). Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

3/ Dans le plan complexe rapporté à un R.O.N.d $(O,\vec{u},\vec{v})$ on considère les points $M_1(1+e^{i\theta})$; $M_2(1-e^{-i\theta})$ et $M(1-e^{i\theta})$, soit $I_{(1)}$ et $\Delta(O,\vec{u})$

3.1 Que décrit le point M_1 lorsque θ décrit $]0,\pi[$

3.2 Montrer que $M_1 = S_I(M)$ et $M_2 = S_\Delta(M)$. Déduire que $M_2 = S_\Delta \circ S_I(M_1)$, que décrit alors M_2 lorsque θ décrit $]0,\pi[$.

Exercice n°4

- Soit a un nombre complexe non nul et (E) l'équation $z^2 - 2z + 1 + a^2 = 0$

1/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

2/ Le plan complexe étant rapporté à un r.o.n direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives $1+ia$ et $1-ia$.

On pose $a = a_1 + ia_2$; a_1 et a_2 réels

2.1 Montrer que les points O, A et B sont alignés ssi $a_1 = 0$

2.2 Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux ssi $|a| = 1$

3/ On suppose que $a = e^{i\alpha}$ où $\alpha \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

3.1 Vérifier que pour tout réel x, on a

$$1 + e^{ix} = 2\cos\frac{x}{2}\, e^{i\frac{x}{2}} \qquad 1 - e^{ix} = -2i\sin\frac{x}{2}\, e^{i\frac{x}{2}}$$

3.2 En déduire l'écriture sous forme exponentielle de chacun des nombres complexes $1+ia$ et $1-ia$.

3.3 Déterminer a pour que les points O, A et B forment un triangle isocèle rectangle en O

Exercice n°5

I.1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2e^{i\alpha}z + 2e^{2i\alpha} = 0$, α un réel de $[0,\pi]$

2. Mettre les solutions sous forme exponentielle.

II Le plan est muni d'un r.o.n direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ on désigne par A et B les points d'affixes respectives $z_1 = (1-i)e^{i\alpha}$ et $z_2 = (1+i)e^{i\alpha}$

1.1 Montrer que $\frac{z_2}{z_1} = i$

1.2 En déduire que OAB est un triangle rectangle et isocèle en O.

2.1 Montrer que $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AB}}) \equiv \alpha + \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

2.2 Déterminer α pour que la droite (AB) soit parallèle à la droite d'équation $y=x$

d'équation $y = x$.

2.3 Construire A et B pour la valeur de α trouvée