Nombres Complexes

Résumé de cours

- $z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Ré } z = 0 \\ \text{Im } z = 0 \end{cases}$

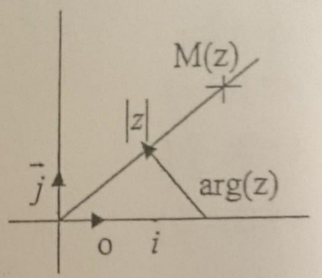
- $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Ré } z = \text{Ré } z' \\ \text{Im } z = \text{Im } z' \end{cases}$

- $z = x + iy$ alors $\boxed{z + \bar{z} = 2x}$ $\boxed{z - \bar{z} = 2iy}$ $\boxed{z\,\bar{z} = x^2 + y^2}$

- $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im } Z = 0 \Leftrightarrow \bar{Z} = Z \Leftrightarrow \arg Z = k\pi \quad, k \in \mathbb{Z} \quad (Z \neq 0)$
- $Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Re } Z = 0 \Leftrightarrow \bar{Z} = -Z \Leftrightarrow \arg Z = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (Z \neq 0)$

nterprétation géométrique :

- Soit $M(z)$ on a : $|z| = OM$ et $\arg z \equiv (\vec{i}, \overrightarrow{OM})\ [2\pi]$
- $|z_A - z_B| = AB$
- $\arg(z_B - z_A) \equiv (\vec{i}, \overrightarrow{AB})\ [2\pi]$
- $\text{aff}(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A$
- $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})[2\pi]$



orème :

nt $\vec{u}(a), \vec{v}(b)$ et $b \neq 0$ $\boxed{\vec{u} \text{ est colinéaire à } \vec{v} \text{ signifie } \frac{a}{b} \in \mathbb{R}}$ $\boxed{\vec{u} \text{ est orthogonal à } \vec{v} \text{ signifie } \frac{a}{b} \in i\mathbb{R}}$

ropriétés de l'argument :

$(z\,z') \equiv \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z')\ [2\pi]$ $\qquad \alpha > 0$

$(\frac{1}{z}) \equiv -\text{Arg}(z)\ [2\pi]$

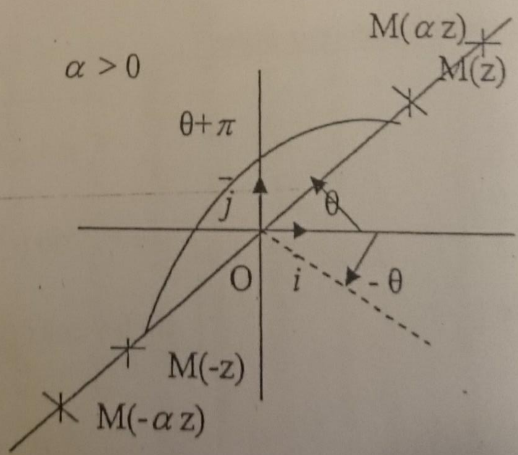
$\frac{z}{z'}) \equiv \text{Arg}(z) - \text{Arg}(z')\ [2\pi]$

$z^n) \equiv n\,\text{Arg}(z)\ [2\pi]$

$\alpha z) \equiv \text{Arg}(z)\ [2\pi] \qquad \alpha > 0$

$-\alpha z) \equiv \text{Arg}(z) + \pi\ [2\pi] \qquad \alpha > 0$

$\bar{z}) \equiv -\text{Arg}(z)\ [2\pi]$



orme trigonométrique – Forme exponentielle :

$z = x + iy$

me trigonométrique de z est $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\underline{r > 0}$ on note $z = [r, \theta]$

me exponentielle de z est $z = r e^{i\theta}$ avec $\underline{r > 0}$

$$\boxed{r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \text{ et } \sin\theta = \frac{y}{r}}$$

ns : $-1 = e^{i\pi}$, $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$z = [r, \theta]$, $z' = [r', \theta']$	$z = re^{i\theta}$, $z' = r'e^{i\theta'}$
* $z.z' = [r, \theta]\,[r', \theta'] = [rr', \theta+\theta']$ * $\frac{1}{z} = \frac{1}{[r,\theta]} = [\frac{1}{r}, -\theta]$ * $\frac{z}{z'} = \frac{[r,\theta]}{[r',\theta']} = [\frac{r}{r'}, \theta - \theta']$ * $z^n = [r, \theta]^n = [r^n, n\theta]$ * $\bar{z} = [r, -\theta]$ * $-z = [r, \theta+\pi]$	* $z.z' = re^{i\theta}.r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$ * $\frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$ * $\frac{z}{z'} = \frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$ * $z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$ * $\bar{z} = re^{-i\theta}$ * $-z = re^{i(\theta+\pi)}$

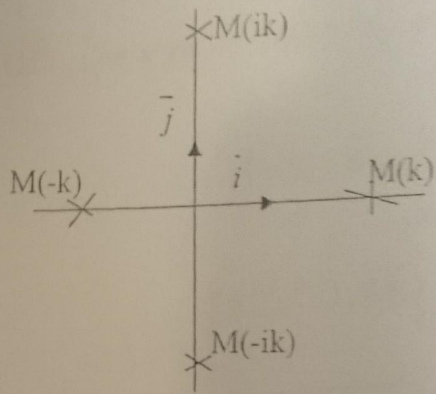
6) Soit $k \in IR^*$,

Si $z = k \rightarrow z = [k, 0]$

Si $z = -k \rightarrow z = [k, \pi]$

Si $z = ik \rightarrow z = [k, \frac{\pi}{2}]$

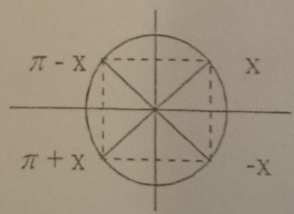
Si $z = -ik \rightarrow z = [k, -\frac{\pi}{2}]$



7) Formules de Moivre . Formules d'Euler :

- $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$
- $\boxed{e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta}$ $\boxed{e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\,\sin\theta}$ $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

8) Formules trigonométriquement utiles :



$$\begin{cases} 1 + \cos\theta = 2\cos^2(\frac{\theta}{2}) \\ 1 - \cos\theta = 2\sin^2(\frac{\theta}{2}) \\ \sin\theta = 2\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2}) \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\theta = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) \\ \sin\theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos(-\theta) = \cos\theta \\ \sin(-\theta) = -\sin\theta \end{cases}$$

Retenons:

- $1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}) = 2\cos(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}$ (à démontrer)
- $1 - e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}) = -2i\sin(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}$ (à démontrer)
- $e^{ia} + e^{ib} = e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{a-b}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{b-a}{2}\right)}\right) = e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ (a achever)
- $|z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow$ M appartient à la médiatrice de [AB]
- $|z - z_A| = r \Leftrightarrow AM = r \Leftrightarrow$ M appartient au cercle de centre A et de rayon r.
- $Z_M = 1 + e^{i\theta} = 1 + \cos\theta +$ … $M(x,y) \Rightarrow x = 1 + \cos\theta$, y …

on a $\cos^2\theta + i\sin^2$ … (1,0)

Prof Mr Ben Brahim
Lycée Pilote Nabeul Exemples de détermination de δ : $4^{ème}$

Exercice : Déterminer une racine carrées de Δ :

1) $\Delta=-4$ 2) $\Delta=4i$, 3) $\Delta=-3i$, 4) $\Delta=5-12i$

5) $\Delta=(2+3i)^2-24i$ 6) $\Delta=(m-3i)^2+12mi$ 7) $\Delta=(\cos\theta)^2-1$.

8) $\Delta=-2e^{i\theta}$, 9) $Z=-2im^2$ 10) $\Delta=\cos^2(2\theta)+2i\sin(2\theta)$

11) $\Delta=\alpha^2(\alpha+i)^2-4i\alpha^3$ avec $\alpha\in\mathbb{C}$, 12) $\Delta=(\cos\theta+2i)^2-8i\cos\theta$

13) $\Delta=2\cos\theta\, e^{i\theta}-1$ 14) $\Delta=(3\cos\theta-i\sin\theta)^2-8$

Solution:

1) $\Delta=-4=-1\times4=i^2\times2^2=(2i)^2$

D'où $\delta=2i$ est une racine carré de Δ .

2) $\Delta=4i=2\times2i=2(1+i)^2=(\sqrt{2}(1+i))^2$ $\boxed{2i=(1+i)^2}$

D'où $\delta=\sqrt{2}(1+i)$ est une racine carré de Δ.

4) $\Delta=-3i=\frac{3}{2}(-2i)=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2(1-i)^2$ $\boxed{-2i=(1-i)^2}$

D'où $\delta=\sqrt{\frac{3}{2}}(1-i)$ est une racine carré de Δ.

1) $\Delta=5-12i=3^2+(2i)^2-2\times3\times(2i)=(3-2i)^2$ d'où $\delta=3-2i$ est une racine de Δ.

on pose $\delta=x+iy$, $\delta^2=\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=5 \\ xy=-6 \end{cases}$

On remarque que $x=3$, $y=-2$ est une solution du problème $\rightarrow$ $\delta=3-2i$ est une racine carré de Δ.

5) $\Delta=(2+3i)^2-24i=(2-3i)^2$ Car : $\boxed{(a+b)^2-4ab=(a-b)^2}$

d'ou $\delta=2-3i$ est une racine carré de Δ

6) $\Delta=(m-3i)^2+12mi=(m+3i)^2$ car $\boxed{(a-b)^2+4ab=(a+b)^2}$

d'ou $\delta=m+3i$ est une racine carré de Δ

7) $\Delta=\cos^2x-1=-\sin^2x=(i\sin x)^2$ d'ou $\delta=i\sin x$ est une racine carré de Δ.

8) $\Delta=-2e^{i\theta}$ $(-1)\times2e^{i\theta}=i^2\times\sqrt{2}^2\left(e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2=\left(i\sqrt{2}e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2$

d'ou $\delta=i\sqrt{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$ est une racine carrée d eΔ

9) $Z=-2im^2=(1-i)^2m^2$ d'où $\delta=(1-i)m$ est une racine carré de Δ.

10) $=\cos^2(2\theta)+2i\sin(2\theta)=1-\sin^2(2\theta)+2i\sin(2\theta)=1^2+(i\sin(2\theta))^2+2\times1\times(i\sin(2\theta))$

$=(1+i\sin\theta)^2$

d'où $\delta=1+i\sin\theta$ est une racine carré de Δ.

11) $\Delta=\alpha^2(\alpha+i)^2-4i\alpha^3=\alpha^2\left[(\alpha+i)^2-4i\alpha\right]=\alpha^2(\alpha-i)^2$ Car : $\boxed{(a+b)^2-4ab=(a-b)^2}$

d'où $\delta=\alpha(\alpha-i)$ est une racine carré de Δ.

12) $\Delta=(\cos\theta+2i)^2-8i\cos\theta=(\cos\theta-2i)^2$ Car : $\boxed{(a+b)^2-4ab=(a-b)^2}$

d'où $\delta=\cos\theta-2i$ est une racine carré de Δ.

13) $\Delta=2\cos\theta e^{i\theta}-1=(e^{i\theta}+e^{-i\theta})e^{i\theta}-1=e^{2i\theta}+1-1=e^{2i\theta}=(e^{i\theta})^2$

d'ou $\delta=e^{i\theta}$ est une racine carré de Δ.

14) $\Delta=(3\cos\theta-i\sin\theta)^2-8=9\cos^2\theta-6i\cos\theta\sin\theta-\sin^2\theta-8$

$=9\cos^2\theta-6i\cos\theta\sin\theta-\sin^2\theta-8(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$

$=\cos^2\theta-6i\cos\theta\sin\theta-9\sin^2\theta$

$=\cos^2\theta-2\cos\theta(3i\sin\theta)+(3i\sin\theta)^2$

$=(\cos\theta-3i\sin\theta)^2$

D'où $\delta=\cos\theta-3i\sin\theta$ est une racine carré de Δ.

Dans toute la série le plan est muni d'un repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j})$

Exercice 1 : Déterminer géométriquement les ensembles :

$E_1=\left\{M(z)\ telque\ \frac{iz+2}{z-1+i}\in\mathbb{R}\right\}$, $E_2=\left\{M(z)\ telque\left|(1-i)\bar{z}+2\right|=10\right\}$

$E_3=\{M(z)$ tel que $\arg(-2\bar{z}-2i+4)\equiv\frac{\pi}{3}[\pi]\}$ et $E_4=\{M(z)$ tel que $\arg\left((z-1-i)^3\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Exercice 2 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j})$.

On considère les points A(i) , B(- 2i) , C ($\frac{1}{2}i$) et D(1) Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{i\}$

A tout point M(z) avec on fait associer le point M '(z ') tel que z '= $\frac{2z-i}{iz+1}$

1) Montrer que $BM'.AM=1$ et en déduire l'ensemble des points M' si M décrit le cercle $\mathcal{C}$ (A,1)
2) Montrer que $(\vec{i},\overrightarrow{OM'})\equiv(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC})-\frac{\pi}{2}[2\pi]$ en déduire l'ensemble des points M si M' décrit $[OD)$ privée de O.

Exercice 3 : Soit le point A (1) et la droite D : x = 1

Soit l'application f de $P\longrightarrow P$ qui a tout point M d'affixe z tel que z≠ 1, on associé le point M'(z') tel que $z'=\frac{z-1}{1-\bar{z}}$.

1) a) Soit B(1+ 3 i) Déterminer l'image B' du point B par f
 b) Démontrer que z' = 1 si et seulement si M∈D\ {A} .
1) a) Etablir que $|z'|=1$, donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.
 b) Etablir que $\frac{z'-1}{z-1}$ est réel et donner une interprétation géométrique du résultat
 c) En déduire une construction de M' connaissant M.

Exercice 4 : Soit $Z_1=1+i\sqrt{3}$ Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tel que Z_1^n soit un réel.

Exercice 5: Soit M_n le point d'affixe z^n où $z=1+i$ et n $\in\mathbb{N}$.

1) Déterminer les valeurs de n pour que $M_n\in D:y=x$.
2) Déterminer les valeurs de n pour que O, M_2 et M_n soient alignés.

Exercice 6 : Soient $z_1=2e^{i\theta}$, $z_2=1+e^{i\theta}$ et $z_3=-1+e^{i\theta}$ avec $\theta\in]0,\pi[$

On considère les points A(z_1) B(z_2) et C(z_3)

1. Ecrire z_2 et z_3 sous la forme exponentielle.
2. Montrer que OBAC est un rectangle.
3. Déterminer le réel $\theta\in]0,\pi[$ tel que OBAC soit un carré.

Exercice 7 : Soi $z=i+e^{i\theta}$; $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ Ecrire sous la forme exponentielle

Exercice 8 : Déterminer et construire les ensembles :

E₁={ M(1+$e^{i\theta}$) avec $\theta\in]0,\pi[$ }. E₂ ={M(1+ i tgθ) avec $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}[$ }.

Exercice 9 : Soit A(- 1) , B(1) , M(z) et M'(z') avec $z'=\frac{z+1}{z-1}$ avec z $\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$

1) Montrer que [BA) et la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'})$.

2) Montrer que z' est imaginaire

) Si M appartient au cerc connaissant M

Prof: Mr Ben Brahim .M.H
Lycée Pilote Nabeul

$4^{ème}$ Math

Série Corrigée N° 1

Exercice 1 : Soit $z_1 = 2e^{i\theta}$, $z_2 = 1+e^{i\theta}$ et $z_3 = -1+e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0,\pi[$

On considère les points A(z_1) B(z_2) et C(z_3)

1. Ecrire z_2 et z_3 sous la forme exponentielle.
2. Montrer que OBAC est un rectangle.
3. Déterminer le réel $\theta \in]0,\pi[$ tel que OBAC soit un carré.

Exercice 2 : Déterminer et construire les ensembles : $E_1 = \{ M(1+e^{i\theta})$ avec $\theta \in]0,\pi[\}$.

$E2 = \{M(1+i\cos\theta)$ avec $\theta \in [0,\frac{\pi}{2}[\}$.

Exercice 3 :

le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$

Pour tout $z \in \mathbb{C}^* \setminus \{-1\}$ on pose $z' = \dfrac{z^2}{z+1}$ soit A(- 1), M(z) et M'(z')

a) Montrer que OM' AM = OM² et $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}) \equiv (\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO})[2\pi]$

b) Si le triangle OMA est rectangle isocèle en M et direct. Quelle la nature de tringle OMM'.

Exercice 4 : Soit $\theta \in [0,\frac{\pi}{2}]$ et soit l'équation $E_\theta : z^2 + 2ie^{i\theta}\sin\theta z - e^{2i\theta} = 0$.

Montrer que 1 est une solution de E_θ et calculer l'autre racine en fonction de θ.

Exercice 5 :

1) Résoudre dans C l'équation $z^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)$ (on donnera les solutions sous la forme exponentielle)

2) En utilisant les racines cubiques de l'unité écrire les solutions déjà trouvées sous la forme trigonométrique.

Exercice 6 : Soit dans C l'équation (E) : $(z-i)^3 - iz^3 = 0$

1) a) Montrer que si z est une solution de (E) alors $|z-i| = |z|$

b) En déduire que si z est une solution de (E) alors $\text{Im}(z) = \frac{1}{2}$.

c) Montrer que si z est une solution de (E) alors $z - i = \bar{z}$

2) Montrer que si z est une solution de (E) alors $\arg(z) = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

3) En déduire une construction des images des solutions de (E).

4) Ecrire les solutions de (E) sous la forme trigonométrique.

Exercice 1 :

$z_1 = 2e^{i\theta} \to A(z_1)$; $z_2 = 1+e^{i\theta} \to B(z_2)$; $z_3 = -1+e^{i\theta} \to C(z_3)$ $\theta \in]0,\pi[$

1) $z_2 = 1+e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = e^{i\frac{\theta}{2}}2\cos\frac{\theta}{2} = \underbrace{2\cos\frac{\theta}{2}}_{>0}e^{i\frac{\theta}{2}}$ car $\frac{\theta}{2} \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

- $z_3 = -1+e^{i\theta} = -e^{i\frac{\theta}{2}}e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}}$

$$= e^{i\frac{\theta}{2}}\left(-e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = e^{i\frac{\theta}{2}}2i\sin\frac{\theta}{2} = e^{i\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{\pi}{2}}2\sin\frac{\theta}{2} = \underbrace{2\sin\frac{\theta}{2}}_{>0}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}$$

car $\frac{\theta}{2} \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

2) Montrons que $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CA}$ et $(BO) \perp (OC)$

- Aff $(\overrightarrow{OB}) = z_B - z_O = z_2 = 1+e^{i\theta}$

  Aff $(\overrightarrow{CA}) = z_A - z_C = z_1 - z_3 = 2e^{i\theta} - (-1+e^{i\theta}) = 1+e^{i\theta}$

Alors Aff $(\overrightarrow{OB}) = Aff\ (\overrightarrow{CA})$ d'où $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CA}$ par la suite OBAC est un parallélogramme.

- Aff $(\overrightarrow{OB}) = z_2 = 1+e^{i\theta} = 1+\cos\theta + i\sin\theta$ alors $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}1+\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$

  Aff $(\overrightarrow{OC}) = z_3 = -1+e^{i\theta} = -1+\cos\theta + i\sin\theta$ alors $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}1+\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = (1+\cos\theta)(-1+\cos\theta) + \sin^2\theta = -1+\cos^2\theta+\sin^2\theta = 0$ donc $(OB) \perp (OC)$

Conclusion : OBAC est un rectangle.

3) Pour que OBAC soit un carré il suffit que OB = OC.

On a OB = OC signifie $|z_2| = |z_3|$

Signifie $2\cos\frac{\theta}{2} = 2\sin\frac{\theta}{2}$

signifie $\cos\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\theta}{2}$

Or $\frac{\theta}{2} \in \left]0;\frac{\pi}{4}\right[$ alors $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

Exercice 2 :

- $E_1 : \{M(1+e^{i\theta}); \theta \in]0,\pi[\}$

On pose M(x, y) on a : $z_M = 1+e^{i\theta} = 1+\cos\theta + i\sin\theta$

D'où $M \in E_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+\cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$; $\theta \in]0,\pi[$

On a : $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ alors $(x-1)^2 + y^2 = 1$

C'est l'équation du cercle C de centre $I(1,0)$ et de rayon r.

on a $\theta \in]0,\pi[$ alors $-1 < \cos\theta < 1 \Rightarrow 0 < 1+\cos\theta < 2 \Rightarrow 0 < x < 2$

$0 < \sin\theta \leq 1 \Rightarrow 0 < y \leq 1$

Conclusion E est la partie du cercle $\mathcal{C}$ tel que : $\begin{cases} 0<x<2 \\ 0<y\leq 1 \end{cases}$

• $E_2=\left\{M\left(1+i\cos\theta\right);\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right\}$

On pose : M(x, y) On a : $z_M=1+i\cos\theta$

D'où $M\in E_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\cos\theta \end{cases}$; $\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ d'où M appartient à la droite $\Delta : x=1$

or $\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow y\in\left]0,1\right]$ d'où E_2 est la partie de Δ tel que $y\in\left]0,1\right[$

$E_2=[AB]-\{A\}$ avec A(1, 0) et B(1,1)

Exercice 3 :

On a : $z'=\dfrac{z^2}{z+1}$; $z\in\mathbb{C}'\setminus\{-1\}$

A(-1) ; M(z) ; M'(z')

a) $OM'AM=OM^2$?

•On a: $OM'AM=|z_{M'}||z_M-z_A|=|z'||z+1|=|z'(z+1)|=|z^2|=|z_M|^2=OM^2$ car $z'=\dfrac{z^2}{z+1}$

• $\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MO}}\right)[2\pi]$?

On a: $\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}\right)\equiv \arg\left(\dfrac{z'}{z}\right)\equiv\arg\left(\dfrac{z}{z+1}\right)[2\pi]$ car $z'=\dfrac{z^2}{z+1}$

$\equiv\arg\left(\dfrac{z_M}{z_M-z_A}\right)$

$\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO}}\right)[2\pi]$

b) Si OMA est un triangle rectangle et isocèle en M et direct. Quelle est la nature de OMM' ?

On a OMA est un triangle rectangle et isocèle en M et direct $\Leftrightarrow \begin{cases} MA=MO \\ \left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

or d'après a) on a : $OM'\times AM=OM^2$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO}}\right)[2\pi]$

d'où $OM'=OM$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

d'où OMM' est rectangle et isocèle en O et direct.

Exercice 4 :

$z^2+2ie^{i\theta}\sin\theta z-e^{2i\theta}=0$

on a : $1^2+2ie^{i\theta}\sin\theta\times1-e^{2i\theta}=1+e^{i\theta}(2i\sin\theta)-e^{2i\theta}=1+e^{i\theta}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)-e^{2i\theta}=1+e^{2i\theta}-1-e^{2i\theta}=0$

d'où 1 est une solution.

On a : $z_0=1$ alors $z_1=\frac{c}{a}=-e^{2i\theta}$

Exercice 5 :

1) $z^3=4\sqrt{2}(-1+i)$

$\Leftrightarrow$ z est une racine cubique de $a=8e^{i\frac{3}{4}\pi}$

$\Leftrightarrow z_k=\sqrt[3]{8}\,e^{i\left(\frac{\frac{3\pi}{4}}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)}=2e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$; $k\in\{0,1,2\}$

$\boxed{S_{\mathbb{C}}=\{z_0,z_1,z_2\}}$

2) • $z_0=2e^{i\frac{\pi}{4}}=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

• $z_1=2e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)}=2e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{2\pi}{3}}=z_0\ j$

$z_1=\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)+i\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

• $z_2=\underbrace{2e^{i\frac{\pi}{4}}}_{z_0}e^{i\frac{4}{3}\pi}=z_0\ \bar{j}\ =\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}+i\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$

(Rappel : $|j|=1$; $j^3=1$; $j^2=\bar{j}=\frac{1}{j}$, $1+j+j^2=0$)

Exercice 6 :

$(E):(z-i)^3-iz^3=0$

1)

a) Si z st solution de (E) alors $|z-i|=|z|$?

• Si z est solution $\Leftrightarrow (z-i)^3-iz^3=0$

$\Leftrightarrow (z-i)^3=iz^3$

Alors $|z-i|^3=|i||z|^3$

Alors $|z-i|^3=|z|^3$

Alors $|z-i|=|z|$

b) On pose : $z=x+iy$; $x\in\mathbb{R}$; $y\in\mathbb{R}$

Si : z est une solution, on a d'après 1) a) $|z-i|=|z|$

équivaut $|x+iy-i|=|x+iy|$

équivaut $|x+i(y-i)|=|x+iy|$

équivaut $\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x^2+y^2)}$

équivaut $x^2+(y-1)^2=x^2+y^2$

équivaut $x^2+y^2-2y+1=x^2+y^2$

équivaut $-2y+1$

équivaut $y=\frac{1}{2}$ équivaut $\operatorname{Im} z=\frac{1}{2}$

c) Montrons si z est solution alors $z-i=\bar{z}$?

on a , si z est solution alors $\operatorname{Im} z=\frac{1}{2}$ alors $\frac{z-\bar{z}}{2i}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow z-\bar{z}=i$ cq $z-i=\bar{z}$

2) Montrons que si z est solution alors $\arg(z)\equiv-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}$ avec $k\in\mathbb{Z}$?

- on a d'après 1) c) si z est solution alors $z-i=\overline{z}$

or on a : $(z-i)^3-iz^3=0$ d'où $\overline{z}^3-iz^3=0$

$\Rightarrow \overline{z}^3=iz^3$

$\Rightarrow \arg\left(\overline{z}^3\right)\equiv\arg\left(iz^3\right)[2\pi]$

$\Rightarrow 3\arg\left(\overline{z}\right)\equiv\arg(i)+\arg\left(z^3\right)[2\pi]$

$\Rightarrow 3(-\arg z)\equiv\frac{\pi}{2}+3\arg(z)[2\pi]$

$\Rightarrow 6\arg z\equiv-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

$\Rightarrow \arg(z)\equiv-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}$; $k\in\mathbb{Z}$

3) on a:

si $k=0:\arg(z)\equiv-\frac{\pi}{12}$

si $k=1:\arg(z)\equiv-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}$

si $k=2:\arg(z)\equiv-\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}=\frac{7\pi}{12}$

si $k=3:\arg(z)\equiv-\frac{\pi}{12}+\frac{3\pi}{3}=\frac{11\pi}{12}$

si $k=4:\arg(z)\equiv-\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}=\frac{5\pi}{4}$

si $k=5:\arg(z)\equiv-\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{3}=\frac{19\pi}{12}$

On a: $\operatorname{Im} z=\frac{1}{2}\Leftrightarrow M(z)\in\Delta$ avec : $\Delta : y=\frac{1}{2}$

On a : $\arg(z)\equiv\left(\vec{i}\,\overrightarrow{OM}\right)[2\pi]$

Soit la demi droite $[ot)$ tel que $\left(\vec{i}\,\overrightarrow{ot}\right)\equiv\arg(z)[2\pi]$

On a : $M\in[ot)$ d'où $M\in\Delta\cap[ot)$

on a : si $\arg(z)\in\left\{-\frac{\pi}{12};\frac{5\pi}{4};\frac{19\pi}{12}\right\}$ alors $\Delta\cap[ot)=\phi$ impossible (Faire une figure)

et puisque l' équation (E) admet 3 solutions alors $\arg(z)\in\left\{\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{12};\frac{11\pi}{12}\right\}$

4) On a : $\operatorname{Im} z=\frac{1}{2}\Leftrightarrow r\sin\theta=\frac{1}{2}\Leftrightarrow r=\frac{1}{2\sin\theta}$

- Si $\theta=\frac{\pi}{4}\Rightarrow r=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\Rightarrow z_0=re^{i\theta}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}$

- Si $\theta=\frac{7\pi}{12}\Rightarrow r=\frac{1}{2\sin\frac{7\pi}{12}}$ $\Rightarrow z_1=\frac{1}{2\sin\frac{7\pi}{12}}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

- Si $\theta=\frac{11\pi}{12}\Rightarrow r=\frac{1}{2\sin\frac{11\pi}{12}}\Rightarrow z_1=\frac{1}{2\sin\frac{11\pi}{12}}e^{i\frac{11\pi}{12}}$

Exercice 1 : Résoudre par deux méthode l'équation : $z^2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et en déduire $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Exercice 2 :

1) Résoudre dans C l'équation $z^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)$ (On donnera les solutions sous La forme exponentielle)
2) En utilisant les racines cubiques de l'unité écrire les solutions déjà trouvées sous la forme algébrique

Exercice 3 :

1) Résoudre dans C l'équation : $z^4 = 1$ (on donnera les solutions sous la forme algébrique).
2) soit $u = 4(7+24i)$ vérifier que $z_0 = 3+i$ est une racine $4^{\text{ème}}$ de u.
3) En déduire les solutions dans C de l'équation : $z^4 - 4(7+24i) = 0$.

Exercice 4 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = i$
2) montrer que $\frac{z-i}{z+i} = e^{i\alpha}$ signifie $z = -\cot g(\frac{\alpha}{2})$ avec $\alpha \neq 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)
3) Soit l'équation (E) : $(z-i)^3 = i(z+i)^3$

   a) Sans résoudre l'équation montrer que les images des solutions sont sur une droite que l'on précisera.

   b) Résoudre l'équation (E)

Exercice 5:

1) Montrer que : $z^5 = \bar{z}$ et $z \in \mathbb{C}^* \Leftrightarrow z^6 = 1$
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = \bar{z}$.

Exercice 6 : Soit dans C l'équation (E) : $(z-i)^3 - iz^3 = 0$

1) a) Montrer que si z est une solution de (E) alors $|z-i| = |z|$

   b) En déduire que si z est une solution de (E) alors $\text{Im}(z) = \frac{1}{2}$.

   c) Montrer que si z est une solution de (E) alors $z - i = \bar{z}$
2) Montrer que si z est une solution de (E) alors $\arg(z) = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}$ avec $k \in \mathbb{Z}$
3) En déduire une construction des images des solutions de (E).
4) Ecrire les solutions de (E) sous la forme trigonométrique.

Exercice 7:

Soit $P(z) = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ ($z \in \mathbb{C}$)

1) Déterminer les solutions de l'équation $z^7 = 1$
2) Déduire les solutions de l'équation P(z) =0
3) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a :

$$P(z) = \left(z^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)z + 1\right)\left(z^2 - 2\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)z + 1\right)\left(z^2 - 2\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)z + 1\right)$$

Exercice 8: Soit θ un réel de l'intervalle $]0, \pi[$, on donne l'équation suivante :

(E) : $2z^6 - 2\sqrt{2}z^5 + (1 - e^{i2\theta})z^4 - 2z^2 + 2\sqrt{2}z - 1 + e^{i2\theta} = 0$.

1) Vérifier que les racines $4^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont solutions de l'équation (E).
2)
   a) Résoudre alors l'équation (E).

   b) Mettre les solutions

3) Comment choisir θ ... un même cercle ?

Equations dans $\mathbb{C}$

1) Equations de type : $z^2 = a$ avec $a \in \mathbb{C}$:

1) Méthode algébrique :

On pose $z = x + iy$, $x \in IR$, $y \in IR$ on $z^2 = a \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = Re(a) \\ x^2 + y^2 = |a| \\ 2xy = Im(a) \end{cases}$ (*)

2) Méthode trigonométrique : si $a = r\,e^{i\theta}$ avec $r > 0$

On a $z^2 = a$ signifie $z^2 = r\,e^{i\theta}$ signifie $z^2 = \left(\sqrt{r}\right)^2\left(e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2$ d'ou $z = \pm\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$

2) Résolution de l'équation : $az^2 + bz + c = 0$

- $\Delta = b^2 - 4ac$ $\quad z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ $\quad z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ avec δ est une racine carré de Δ.
- $\Delta' = b'^2 - ac$ $\quad z_1 = \dfrac{-b'-\delta'}{a}$ $\quad z_2 = \dfrac{-b'+\delta'}{a}$ $\quad (b' = \dfrac{b}{2})$
- $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ $\quad z_1 . z_2 = \dfrac{c}{a}$
- si $a + b + c = 0 \Rightarrow z' = 1$; $z'' = \dfrac{c}{a}$

  si $a - b + c = 0 \Rightarrow z' = -1$; $z'' = -\dfrac{c}{a}$
- $az^2 + bz + c = a(z - z_0)(z - z_1)$
- $(z - z_1)(z - z_2) = z^2 - Sz + p$ avec $S = z_1 + z_2$ et $p = z_1 . z_2$.

Remarques :

- $(z - z_0)(z - \overline{z_0}) = z^2 - 2\,Re(z_0)z + |z_0|^2$
- $[r, \theta] = [r', \theta'] \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' + 2k\pi,\ k \in Z. \end{cases}$
- $[r, \theta] = [r, \theta + 2k\pi]$
- z_0 est une solution réel $\Leftrightarrow$ $z_0 = x$ avec $x \in IR$

  z_0 est une solution imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $z_0 = i\,y$ avec $y \in IR$

3) Autres exemples d'équations :

- Si $P(z)$ est un polynôme de $3^{ème}$ degré et si z_0 est une racine alors $P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$
- Si $P(z)$ est un polynôme de $3^{ème}$ degré et si z_0 et z_1 sont deux racines alors on a $P(z) = (z - z_0)(z - z_1)(az + b)$.
- Si $P(z)$ est un polynôme de $4^{ème}$ degré et si z_0 et z_1 sont 2 racines alors : $P(z) = (z - z_0)(z - z_1)(az^2 + bz + c)$.
- Si les coefficients de l'équation (E) sont réels on a : si z_0 est un solution alors $\overline{z_0}$ est au[illegible] une solution.(à demontrer)
- Soit $P_n(z)$ un po[illegible] $z_0)(z - z_1)....(z - z_{n-1})$

avec a = coefficient de terme de z^n et $z_0, z_1, z_2 \ldots z_{n-1}$ sont les racines

4) Racines nième d'un nombre complexe :

- z est une racine $n^{\text{ième}}$ de a $\Leftrightarrow z^n = a$
- Si $a = [r, \theta]$ alors les racines $n^{\text{ième}}$ de a sont $z_k = [\sqrt[n]{r}, \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}]$ ou $z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$

  $k \in \{0, 1, .., n-1\}$.
- Les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unités sont $z_k = [1, \frac{2k\pi}{n}] = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ $k \in \{0, 1, .., n-1\}$.

En particulier :

- Les racines cubique de 1 sont 1, j, $\bar{j}$ avec $j = [1, \frac{2\pi}{3}] = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Les racines $4^{\text{ème}}$ de 1 sont 1, -1, i, -i .

Remarques :

- Si z_0 est une racine $n^{\text{ième}}$ de a alors les racines $n^{\text{ième}}$ de a sont : $z_k = z_0\, e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ $\in \{0, 1, .., n-1\}$.

En effet $z^n = a \Leftrightarrow z^n = z_0^n \Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{z_0} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ $k \in \{0, 1, .., n-1\}$.

- Les images des racines $n^{\text{ième}}$ sont sur un même cercle de centre O et de rayon $r = \sqrt[n]{|z|}$ et forment un polygone régulier.

Exemples de détermination de δ :

Méthode : Pour déterminer une racine carrée de Δ on essaye d'écrire Δ sous la forme d'un carré.

1) $\Delta = 5 - 12i$ on pose , $\delta = x + iy$, $\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = -6 \end{cases}$

On remarque que $x = 3$, $y = -2$ est une solution du problème $\rightarrow$ $\delta = 3 - 2i$ est une racine carré de Δ .

On peut aussi justifier par $\Delta = 5 - 12i = 3 + (2i)^2 - 2\times3\times(2i) = (3 - 2i)^2$

2) $\Delta = -4 = -1 \times 4 = i^2 \times 2^2 = (2i)^2$ $\rightarrow \delta = 2i$ est une racine carré de Δ .

3) $\Delta = 4i = 2x2i = 2(1+i)^2 = (\sqrt{2}(1+i))^2$ car $\boxed{2i = (1+i)^2}$

D'ou $\delta = \sqrt{2}(1+i)$ est une racine carré de Δ .

4) $\Delta = -4i = 2(-2i) = \sqrt{2}^2(1-i)^2$ car $\boxed{-2i = (1-i)^2}$

D'ou $\delta = \sqrt{2}(1-i)$ est une racine carré de Δ.

5) $\Delta = (2+3i)^2 - 24i = (2-3i)^2$ car $\boxed{(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2}$

D'ou $\delta = 2-3i$ est une racine carré de Δ

6) $\Delta = (2-3i)^2 + 24i = (2+3i)^2$ car $\boxed{(a-b)^2 + 4ab = (a+b)^2}$

D'ou $\delta = 2+3i$ est une racine carré de Δ

7) $\Delta = \cos^2 x - 1 = -\sin^2 x = (i\sin x)^2$ d'ou $\delta = i\sin x$ est une racine carré de Δ.

8) $\Delta = e^{i\theta} = \left(e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2 \rightarrow \delta = e^{i\frac{\theta}{2}}$

Prof Mr Ben Brahim
Lycée Pilote Nabeul **Série d'exercices N°3** $4^{ème}$

Exercice 1 : Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

$Z = 5 + 12i$, $Z = -4$, $Z = 8i$, $Z = -3i$, , $Z = -2i\,m^2$,

$Z = (m - 3i)^2 + 12mi$, $Z = 1 + tg^2\theta$, $Z = (\cos\theta)^2 - 1$. $Z = \cos^2(2\theta) + 2i\sin(2\theta)$

Exercice 2: Résoudre dans C:

1. $z^2 - (1-i)z + 2 - 2i = 0$
2. $z^2 - (1+m)(1+i)z + i(m+1)^2 = 0$ (avec $m \in IR$).
3. $z^4 + (3-4i)z^2 - 12i = 0$

Exercice 3 : Soit $P(z) = z^3 + (-4+5i)z^2 - (1+8i)z + 4 + 3i$.

a) Montrer que l'équation P(z)=0 admet une solution imaginaire qui l'on précisera.
b) Vérifier que 1 est une solution de $P(z) = 0$
c) Résoudre alors l'équation $P(z) = 0$.
d) Déduire dans C les solutions de l'équation : $z^6 + (-4+5i)z^4 - (1+8i)z^2 + 4 + 3i = 0$.

Exercice 4 :

1) Résoudre dans C l'équation $z^2 + (1-2i)z - 2i = 0$
2) En déduire les solutions de l'équation : $z^4 + (1-2i)z^2 - 2i = 0$

Exercice 5 : (Bac 97)

1. Résoudre dans C l'équation $2z^2 - 2(1+i)z + \frac{1}{2} + i = 0$.
2. Soit $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et soit l'équation $E_\theta : 2z^2 - (1 + 2\cos\theta + 2i)z + \cos\theta + i = 0$.
   a) Montrer que l'équation E_θ admet une solution réelle que l'on précisera.
   b) Calculer l'autre racine en fonction de θ.
3. On considère $A(\frac{1}{2})$ et $M(\cos\theta + i)$.
   a) Déterminer l'ensemble $E = \{ M, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \}$.
   b) Déterminer θ pour que la distance AM soit minimale.

Exercice 6 :

Soit $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on considère l'équation (E) : $z^2 - 2e^{i\theta}\cos\theta . z + e^{2i\theta} = 0$.

a) Vérifier que 1 est une solution de l'équation (E).
b) Déterminer alors l'autre solution.

Exercice 7 :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 - m(2+i)z + 2m^2 i = 0$ ($m \in \mathbb{C}$).
On désigne par z' et z'' les solutions de cette équation.
2) Soient A(1) , N(m) , M' (z') , M''(z'')
   a) Déterminer l'ensemble E des points N tels que A M' = A M''.
   b) Déterminer l'ensemble E' des points N tels que A , M' et M'' soient alignés.

Exercice 8 :

Soit l'équation (E) : $z^2 - 2pz - 1 = 0$, où p est un paramètre complexe non réel.
On pose P(p), M'(z') , M'' (z'') et $M = S_O(M'')$ où z' et z'' sont les solutions de (E).
Sans calculer z' et z'', montrer que :

1) P est le milieu du segment [M'M'']
2) Arg(z') + Arg(z'' ... $\overline{OM}$)

Exercice 7 : Serie 3

1) $z^2-m(2+i)z+2m^2i=0$

$a=1\ ;\ b=-m(2+i)\ ;\ c=2m^2i$

$\Delta=b^2-4ac=m^2(2+i)^2-8m^2i=m^2\left[(2+i)^2-8i\right]=m^2(2-i)^2$

(car $(a+b)^2=-4ab=(a-b)^2$).

D'où $\delta=m(2-i)$ est une racine carré de Δ.

$$z'=\frac{-b-\delta}{2a}=\frac{m(2+i)-m(2-i)}{2}=im$$

$$z''=\frac{-b+\delta}{2a}=\frac{m(2+i)+m(2-i)}{2}=2m$$

$S_C=\{im,2m\}$

2) $A(i),N(m),M'(im),M''(2m)$

a) $E=\{N(m)\ tel\ que\ AM'=AM''\}$

on a : $N\in E\Leftrightarrow AM'=AM''\ \Leftrightarrow|z_{M'}-z_A|=|z_{M''}-z_A|\Leftrightarrow|im-1|=|2m-1|$

on pose $m=x+iy\ ;\ x\in\mathbb{R}\ ;\ y\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow|ix-y-1|=|2x+2iy-1|$

$\Leftrightarrow|-1-y+ix|=|2x-1+2iy|$

$\Leftrightarrow(-1-y)^2+x^2=(2x-1)^2+4y^2$

$\Leftrightarrow 1+2y+y^2+x^2=4x^2-4x+1+4y^2$

$\Leftrightarrow 0=3x^2+3y^2-4x-2y$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}y=0$

$\Leftrightarrow\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$\Leftrightarrow\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$

c'est l'équation du cercle $C_{\left(J,\frac{\sqrt{5}}{3}\right)}$ avec $J\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$

$2^{\text{ème}}$ methode : $|im-1|=|2m-1|$

$\Leftrightarrow|i(m+i)|=\left|2\left(m-\frac{1}{2}\right)\right|\Leftrightarrow|i|\times|m-(-i)|=|2|\left|m-\frac{1}{2}\right|$

$\Leftrightarrow|z_N-z_B|=2|z_N-z_C|$ avec $B(-i)$; $C\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow BN=2CN$

$\Leftrightarrow N\in C_{[G_1G_2]}$ avec G_1 bary (B, 1) (C, 2) et G_2 bary (B, 1) (C, -2)

b) $E'=\{N(x)\ tel\ que,\ A,\ M'et\ M''soient\ alignés\}$

on pose $m=x+iy, x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}$

on a: $N\in E'\Leftrightarrow\overrightarrow{AM'}$ colinéaire à $\overrightarrow{AM''}$ A(1, 0) ; M'(-y, x) et M''(2x, 2y)

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}-y-1 & 2x-1\\ x & 2y\end{vmatrix}=0$$

$\Leftrightarrow 2y(-y-1)-x(2x-1)=0\Leftrightarrow-2y^2-2y-2x^2+x=0$

$\Leftrightarrow x^2-\frac{1}{2}x+y^2+y=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{16}+\frac{1}{4}=\frac{5}{16}$

c'est l'équation du cercle C' de centre $J\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{4}$

ou bien :

$N\in E'\Leftrightarrow A,M'\ et\ M''$ sont alignés

* Si $M''=A\Leftrightarrow 2m=1\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}\Leftrightarrow N=D\left(\frac{1}{2}\right)$ d'où $D\in E'$

* Si $M''\neq A$

$N\in E'\Leftrightarrow AM'$ Colinéaire à $\overline{AM'}$ s$\Leftrightarrow\frac{aff\left(\overline{AM'}\right)}{aff\left(\overline{AM''}\right)}\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\frac{z_{M'}-z_A}{z_{M''}-z_A}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{im-1}{2m-1}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow i\frac{m+i}{2m-1}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{m+i}{2m-1}\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\frac{m+i}{m-\frac{1}{2}}\in i\mathbb{R}$$

$\Leftrightarrow\frac{m+i}{m-\frac{1}{2}}\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{z_M-z_B}{z_M-z_D}\in i\mathbb{R}$ $\quad B(-i)$

$\Leftrightarrow\overline{BM}\perp\overline{DM}\Leftrightarrow M\in C_{([BD])}$ D'où $M\in C_{[BD]/\{D\}}$

Conclusion : $E'=C_{[BD]}$

Exercice 8 : Serie 3

$z^2-2pz-1=0\ ;\ p\in\mathbb{C}^*\quad P(p),M'(z'),M''(z''),M=S_O(M'')$

1) $P=M'*M''$?

On a : $\frac{z_{M'}+z_{M''}}{2}=\frac{z'+z''}{2}=\frac{-\frac{b}{a}}{2}=\frac{2p}{2}=p=Z_p$ d'où $P=M'*M''$

2) $\arg(z')+\arg(z'')\equiv\pi[2\pi]$?

- On a : $\arg(z')+\arg(z'')\equiv\arg(z'\times z'')[2a]\equiv\arg\left(\frac{c}{a}\right)\equiv\arg(-1)\equiv\pi[2\pi]$

- $[OI)$ est la bissectrice de $\left(\overrightarrow{OM'},\overrightarrow{OM}\right)$?

Montrons que $\left(\overrightarrow{OM'},\overrightarrow{OI}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}\right)[2\pi]$?

on a : $\left(\overrightarrow{OM'},\overrightarrow{OI}\right)-\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}\right)\equiv-\arg(z')-\arg(z)[2\pi]\equiv-\arg(z'\times z)[2\pi]$

(or : $\boxed{M=S_0(M'')\Leftrightarrow z''=-z\Leftrightarrow z=-z''}$).

$\equiv-\arg(-z'\times z'')[2\pi]\equiv-\arg\left(-\frac{c}{a}\right)[2\pi]\equiv-\arg(1)[2\pi]$

$\equiv 0[2\pi]$ d'où $\left(\overrightarrow{OM'},\overrightarrow{OI}\right)=\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}\right)[2\pi]$

Prof Mr Ben Brahim
Lycée Pilote Nabeul

$4^{ème}$ Math

Série d'exercices N°1

(15)

Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 1 : Résoudre dans C:

1) $z^2-(1-i)z+2-2i=0$
2) $z^2-(1+m)(1+i)z+i(m+1)^2=0$ $(m\in\mathbb{C})$.
3) $z^2-2z+1-e^{2i\theta}=0$.
4) $z^4+(3-4i)z^2-12i=0$

Exercice 2 : Soit $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$ et soit l'équation $E_\theta : 2z^2-(1+2\cos\theta+2i)z+\cos\theta+i=0$.

1) Montrer que l'équation E_θ admet une solution réelle que l'on précisera.
2) Résoudre dans l'équation (E_θ).

Exercice 3 : Soit $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$ et soit l'équation $E_\theta : z^2+2ie^{i\theta}\sin\theta z-e^{2i\theta}=0$.

Montrer que 1 est une solution de E_θ et calculer l'autre racine en fonction de θ.

Exercice 4 : Soit $P(z)=z^3+(-4+5i)z^2-(1+8i)z+4+3i$.

a) Montrer que l'équation P(z)=0 admet une solution imaginaire qui l'on precisera.
b) Vérifier que 1 est une solution de $P(z)=0$
c) Résoudre alors l'équation $P(z)=0$.

math-pilote.blogspot.com

Exercice 5 :

1) Résoudre dans C : $z^2-m(2+i)z+2m^2i=0$ $(m\in\mathbb{C})$.
On désigne par z' et z'' les solutions de cette équation.
2) Soient A(1) , N(m) , M'(z') , M''(z'').
a) Déterminer l'ensemble E des points N tels que AM' = AM''.
b) Déterminer l'ensemble E' des points N tels que A , M' et M'' soient alignés.

Exercice 6:

Soit l'équation (E) : $z^2-2pz-1=0$, où p est un paramètre complexe non réel.
On pose P(p), M'(z'), M''(z'') et $M=S_O(M'')$ où z' et z'' sont les solutions de (E).
Sans calculer z' et z'', montrer que :
1) P est le milieu du segment [M'M''].
2) $\text{Arg}(z')+\text{Arg}(z'')\equiv\pi\,[2\pi]$ et que [OI) est la bissectrice $(\overline{OM'},\overline{OM})$

Exercice 7 : Soit $P(z)=z^4-3z^3+\frac{9}{2}z^2-3z+1$

1) Montrer que si z_0 est une solution de l'équation $P(z)=0$ alors $\overline{z_0}$ et $\frac{1}{z_0}$ sont aussi solution
2) Vérifier que 1+i est une solution de l'équation $P(z)=0$
3) Résoudre l'équation $P(z)=0$.

Exercice 8: On munit le plan complexe d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Résoudre dans l'ensemble C des nombres complexes l'équation (E) :
$z^2-(1+im)z-2-im=0$ où m étant un paramètre complexe.
2) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixes m tels que les solutions de (E) aient même module.
3) On suppose $m=2e^{i\theta}$ avec $\theta\in]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[$ et $Z_1=2+im$, $Z_2=2-i\overline{m}$.
a) Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes Z_1 et Z_2.
b) Déterminer θ pour que le triangle OM_1M_2 soit équilatéral.
c) Déterminer et représenter l'ensemble des points M_1 d'affixe Z_1 lorsque θ décrit $]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[$
en déduire celui de M_2 ...

Serie 4

Exercice 8 : **Attention** $\theta \in \left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$

1) $z^2-(1+im)z-2-im=0\,(m\in\mathbb{R})$

$a=1\;;\;b=-(1+im)\;;\;c=-2-im$

On a : $a-b-c=0$ alors $z'=-1;\ z''=\frac{-c}{a}=2+im\quad S_{\mathbb{C}}=\{-1,2+im\}$

2) $E=\{M(m)\ \text{tel que}\ |z'|=|z''|\}$

$M(m)\in E \Leftrightarrow |z'|=|z''| \quad \Leftrightarrow 1=|2+im| \Leftrightarrow 1=|i(m-2i)| \Leftrightarrow 1=|i||m-2i| \Leftrightarrow |m-2i|=1$

$\Leftrightarrow |z_M-z_A|=1$ avec $A(2i)$

$\Leftrightarrow AM=1 \Leftrightarrow M\in C_{(A,1)}$

3) $m=2e^{i\theta},\ \theta\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[\qquad z_1=2+im\ ;\ z_2=2-i\overline{m}$

a) $z_1=2+im=2+2ie^{i\theta}=2(1+ie^{i\theta})=2\left(1+e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\theta}\right)=2\left(1+e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}\right)$

$=2\left[e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}e^{-i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}+e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right]$

$=2e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\left[\underbrace{e^{-i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}+e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}_{2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right]$

$=\underbrace{4\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}_{<0}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$ car $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\frac{3\pi}{4}\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}<\pi$

$=\underbrace{-4\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}_{>0}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}+\pi\right)}=-4\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5\pi}{4}\right)}$

$z_2=2-i\overline{m}=\overline{2+im}=\overline{z_1}=-4\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{-i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5\pi}{4}\right)}$

b) On a : $z_2=\overline{z_1}$ alors $|z_2|=|\overline{z_1}|$ alors $OM_2=OM_1$

Alors OM_1M_2 est un triangle isocèle en O.

Pour que OM_1M_2 soit équilatéral, il suffit que :

$\left(\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OM_2}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ où $\left(\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OM_2}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$

$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

$\Leftrightarrow \arg(z_2)-\arg(z_1)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

$\Leftrightarrow \left(-\frac{\theta}{2}-\frac{5\pi}{4}\right)-\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5\pi}{4}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

$\Leftrightarrow \theta\equiv\frac{7\pi}{6}[2\pi]$

$\Leftrightarrow \theta=\underbrace{\frac{7\pi}{6}}_{\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[}[2\pi]$

$\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$

$\arg(z_2)-\arg(z_1)\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$

$\theta\equiv\underbrace{\frac{-\pi}{6}}_{\notin\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[}[2\pi]$

impossible, car $\theta\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$

Conclusion $\theta=\frac{7\pi}{6}$

2ème Methode : On a $z_2=\overline{z_1}$ alors $M_2=S_{(O,\vec{u})}(M_1)$

d'où $OM_1=OM_2$ alors OM_1M_2 est isocele en O pour que OM_1M_2 soit équilatéral

Il suffit que $OM_1=M_1M_2$

eq $|z_1|=|z_2-z_1|$

eq $-4\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=|-i\overline{m}-im|$

eq $-4\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=|\overline{m}+m|$

eq $-4\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=|2Re(m)|$

$\Leftrightarrow -4\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\left|\underbrace{4\cos\theta}_{<0}\right|$

$\Leftrightarrow -4\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-4\cos\theta$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\theta$

$\boxed{\cos a=\cos b\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+2k\pi\\a=-b+2k\pi\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\theta=\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}+2k\pi\\\theta=-\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}+2k\pi\end{cases},\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{4}+2k\pi\\\frac{3\theta}{2}=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\theta=\frac{\pi}{2}+4k\pi\\\theta=-\frac{\pi}{6}+\frac{4k\pi}{3}\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}$

comme $\theta\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$ alors $\theta=\frac{7\pi}{6}$

c) On a : $z_1=2+2ie^{i\theta}=2+2i(\cos\theta+i\sin\theta)=2-2\sin\theta+\ldots$

On pose : $M_1(x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2-2\sin\theta, \theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\\ y = 2\cos\theta \end{cases}$

On a : $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\theta = \frac{2-x}{2} \\ \cos\theta = \frac{y}{2} \end{cases}$

Or $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{2-x}{2}\right)^2 \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$

C'est l'équation du cercle $C_{(I,2)}$ avec $I(2,0)$

Or $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq \cos\theta < 0 \\ -1 < \sin\theta < 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq \frac{y}{2} < 0 \\ -1 < \frac{2-x}{2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq y < 0 \\ -2 < 2-x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq y < 0 \\ -4 < -x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq y < 0 \\ 0 \leq x < 4 \end{cases}$$

Conclusion : E est la partie de C situé dans la région du plan $\begin{cases} -2 \leq y < 0 \\ 0 \leq x < 4 \end{cases}$

On a : $M_2 = S_{(y=x)}(M_1)$ alors l'ensemble des plants M_2 est $S_{(y=x)}(E_1)$

C'est la partie du cercle $C_{(I,2)}$ tel que $\begin{cases} 0 \leq x < 42 \\ 0 < y \leq 2 \end{cases}$