LPA M[me] Mahjoubi Besma	Série 2 : complexe	2020/2021 4[ème] Math

Exercice 1 :

Répondre par vrai ou faux en justifiant

1) l'équation : $z^4 = \bar{z}$ admet exactement 4 solutions distinctes

2) Les solutions de l'équation $(z+1)^n + (\bar{z}-1)^n = 0$ sont imaginaires

3) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, le nombre de racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = \bar{z}^{n-1}$ est égal à $2n-1$

4) Si M et M'sont deux points d'affixes inverses alors $(o,\vec{u})$ porte la bissectrice intérieure de $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'})$

Exercice 2 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

1) $z^4 + 6z^2 + 25 = 0$; 2) $z^5 - \bar{z} = 0$; 3) $z\bar{z} + 3(z-\bar{z}) - 13 + 18i = 0$

4) $z^2 - 4\bar{z} - 5 = 0$; 5) $z^3 = 2 + 11i$ $(indiction; développer\ (2+i)^3)$

Exercice 3 :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ $z^{2n} + z^n + 1 = 0$, $n \in \mathbb{N}$

2) Déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de $(\frac{1+z}{1-z})^n + (\frac{1-z}{1+z})^n + 1 = 0$ $,n \in \mathbb{N}$

Exercice 4 :

Soit θ un réel de $]0,\pi[$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ $,z^2 - 2iz - 1 - e^{i\theta} = 0$

2) Soit $p(z) = z^3 - 3iz^2 - (3 + e^{i\theta})z + i(1 + e^{i\theta})$

a) Montrer que l'équation $p(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure que l'on précisera

b) Résoudre alors $p(z) = 0$

3) le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$

On considère les points A, M_1 et M_2 d'affixes respectives $-1+i$, $i + e^{i\theta}$ et $i - e^{i\theta}$

$\theta \in]0;\pi[$

a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM_1} et\ \overrightarrow{AM_2}$ sont orthogonaux

b) Montrer que lorsque θ varie dans $]0,\pi[$ les points M_1 et M_2 varient sur un cercle C que l'on précisera

Exercice 5 :

Soit m un nombre complexe différant de 1 et $(o,\vec{u},\vec{v})$ un repère o.n.d du plan

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2-(1-i)(m+1)z-i(m^2+1)=0$

2) Déterminer les valeurs de m pour que le produit des deux racines de (E) soit égale à1

3) On considère les points $M(z), M_1(z_{1)}\, et M_2(z_2)$ avec $z_1=1-im$ et $z_2=m-i$

a) Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle, pour $m=e^{i\theta}$ et $\theta\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$

b) Déterminer l'ensemble des points M tel que les points M ,M_1 et M_2 sont alignés

c) Déterminer l'ensemble des points M tel que le triangle MM_1M_2 soit rectangle enM_2

Exercice 6 :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2e^{i\theta}z+2e^{2i\theta}=0$ ou $\theta\in[0,\pi]$

2) Soit M et N deux points d'affixes respectives $z_M=(1-i)e^{i\theta} et\, z_N=(1+i)e^{i\theta}$

Montrer que OMN est un triangle rectangle et isocèle

3) Déterminer θ pour que (MN) soit parallèle à la droite $\Delta: y=x$

Exercice 7 :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^4+z^3+z^2+z+1=0$

2) Soit z_1 , z_2 ,z_3 et z_4 les solutions de (E) avec $\arg(z_1)\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

a) Ecrire z_4 , z_2, z_3 en fonction de z_1

b) Calculer $z_1+z_2+z_3+z_4$ et $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}+\frac{1}{z_4}$

Exercice 8 :

1) Déterminer sous forme trigonométrique les racines cubiques de $4\sqrt{2}(-1+i)$

2) Déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

Exercice 9 :(bac 2005)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$, on considère le point A(1)

Soit l'application f de p dans p qui à tout point M(z) associe le point M'(z') ;

$z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}} z + 1 - \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

1) Déterminer la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques

2) Soit le point M_0 d'affixe 2 .On pose pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$ on désigne par z_n l'affixe du point M_n et par Z_n l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM_n}$

a) Montrer que $Z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$

b) Montrer que pour tout $n \; de \; \mathbb{N}$, $Z_n = e^{i\frac{n\pi}{4}}$

c) En déduire l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles les points A ,M_0 et M_n sont alignés.

Exercice 10 :

Soit $x \in [0, \pi]$ on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $S_n(x) = 1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx)$

et $T_n(x) = \sin(x) + \sin(2x) + \cdots \sin(nx)$

1)Calculer $S_n(x) + iT_n(x)$

2) Calculer $S_n(x)$ pour x=0

3)Montrer que si $x \in]0, \pi]$ alors $S_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2} x\right)\cos(\frac{n}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}$