LPA M^me^ Mahjoubi Besma	Série 3	2020/2021 4ème Math

EXERCICE 1 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$. On considère les points $A(2) et B(3)$.

Soit Z un nombre complexe différent de 2 et $Z'=\frac{\bar{Z}-3}{\bar{Z}-2}$. On désigne par M et M' les points d'affixes respectives Z et Z'

1) a) Vérifier que $Z'-1=\frac{-1}{\bar{Z}-2}$.

b) En déduire que $IM'\times AM=1$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{IM'}}\right)\equiv\pi[2\pi]$.

2) Construire le point M' lorsque M est un point du cercle $\mathcal{C}_1$ de centre A et de rayon I.

3) Dans cette question, le point M appartient au cercle $\mathcal{C}_2$ de centre B et de rayon I.

a) Montrer qu'il existe un réel θ de $]-\pi,\pi[$ tel que $Z=3+e^{i\theta}$.

b) Ecrire $Z'-1$ sous forme exponentielle.

c) Montrer que M' appartient à la droite Δ: $x=\frac{1}{2}$.

d) Construire alors le point M' .

EXERCICE 2:

Soit le nombre complexe $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1) a) Calculer j^2 et j^3

b) Montrer que $1+j+j^2=0$

2) Soit a,b,c trois nombres complexes tel que $a+bj+cj^2=0$

a) Montrer que $|a-b|=|b-c|=|c-a|$

b) Soit $A(1+i)$ et $B(-i)$, déterminer un point C pour que le triangle ABC soit équilatéral

EXERCICE 3 :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5+1=0$. On donnera les solutions sous forme exponentielle.

2) En déduire que pour tout nombre complexe z , on a :

$$z^5+1=(z+1)(z^2-2z\cos\frac{\pi}{5}+1))(z^2-2z\cos\frac{3\pi}{5}+1).$$

3) En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{5}$ et celle de $\cos\frac{3\pi}{5}$.

EXERCICE 4 : (D.C 2019)

1) Soit Z un nombre complexe d'argument $\frac{\pi}{5}$ tel que $|Z| = |Z-1|$.

Déterminer un argument de $1 - Z$.

2) A(a) , B(b) et C(c) sont les sommets d'un triangle .

Montrer que : ABC est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$.

3) On désigne par $Z_k = e^{i\frac{2k\pi}{2020}}$, $k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 2019\}$.

Calculer chacun des nombres complexes suivants :

$S = Z_1 + Z_5 + Z_9 + \ldots + Z_{2017}$ et $T = Z_1 + \overline{Z_3} + Z_5 + \overline{Z_7} + Z_9 + \overline{Z_{11}} + \cdots + Z_{2017} + \overline{Z_{2019}}$

EXERCICE 5 :

Soit A et B les points d'affixes respectives 1 et 2.

1) Déterminer et construire l'ensemble Δ des points M , d' affixe z , du plan tels que $|z-2| = |z-1|$.

2) Soit θ un réel différent de $2k\pi$, où k est entier.

Montrer : $\frac{z-2}{z-1} = e^{i\theta}$ équivaut à $z = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} i \cot an(\frac{\theta}{2})$.

3) Soit Γ l'ensemble des points M du plan tels que $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$

Δ et Γ se coupent en un point Ω.. Construire Ω et déterminer son affixe.

4) Soit n un entier naturel non nul. On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

l'équation (E) : $\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^n = i$

a) Soit M le point image dans le plan d'une solution z de l'équation (E).

Montrer que M appartient à Δ et $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}$. où k est entier.

b) Pour $n = 3$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) et construire dans le plan les points images des solutions de (E).

EXERCICE 6 : (D.C 2019)

I/ On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation (E) :

$Z^3 - (1 + e^{i\theta})Z^2 + (1 + e^{i\theta})Z - 1 = 0$; $\theta \in]-\pi, 0[$

1) Montrer que l'équation (E) admet trois solutions <u>distinctes dont deux seulement</u> non réelles. On note Z_1 et Z_2 les solutions non réelles .(On ne cherche pas à calculer Z_1 et Z_2)

2) Soit K le milieu des points M_1 et M_2 d'affixes respectives Z_1 et Z_2 . On note Z_k l'affixe de K

Déterminer l'ensemble Γ décrit par le point K lorsque θ varie dans] $-\pi$, 0 [

II/ Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives 1 et -1 .

1) a) Montrer que : $\frac{(Z_2+1)\,(Z_1-1)}{(Z_2-1)(Z_1+1\,)} = -1$.

b) En déduire que les points A, B, M_1 et M_2 appartiennent à un même cercle.

2) a) Montrer que $(Z_2 - Z_1)^2 = 4\,(Z^2_K - 1)$.

b) En déduire que la bissectrice de l'angle $\widehat{AKB}$ est portée par la droite $(M_1 M_2)$.

3) a)Placer les points A et B et construire l'ensemble Γ .

b) Γ coupe l'axe des imaginaires en un point K .Construire alors les points M_1 et M_2 correspondant .