Série d'exercices N°12
(Nombres Complexes)

Exercice 1 :

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

a) $z_1 = \dfrac{2-5i}{3+i}$; b) $z_2 = \dfrac{-1+i}{(i+2)(1+3i)}$; c) $z_3 = \dfrac{1+4i}{(3-i)^3}$.

d) $z_4 = \dfrac{1+2i}{(2-3i)+(1+i)}$; e) $z_5 = (-1-3i)^2 + (-1+3i)^2$; f) $z_6 = \dfrac{(1+i)^3 i^6}{(1-i)^2}$.

Exercice 2 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1°) $z^2 + 16 = 0$; 2°) $z^2 - z + 1 = 0$; 3°) $2z^2 + 5z + 10 = 0$.

4°) $(-5-2i)z = 1 + iz$; 5°) $\dfrac{z-2}{z+i} = -i$; 6°) $z^3 + i = z - i$.

Exercice 3 :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$; On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2i$; $z_B = -\sqrt{3} + i$ et $z_C = -\sqrt{3} - i$.

1°) Déterminer les affixes des vecteurs $2\vec{AB} - \vec{AC}$; $3\vec{BC} + \vec{BA}$.

2°) Déterminer l'affixe du point D pour que ABCD soit un parallélogramme.

3°) Soit le point $E(-2\sqrt{3})$. Montrer que les points A, B et E sont alignés.

4°) On considère le point $F = S_A(B)$. Déterminer l'affixe du point F.

Exercice 4 :

Dans le plan complexe ; on considère les points $A(1+i)$, B et C tels que $z_B = \overline{z_A}$; $z_C = 2z_B$.

1) a) Placer les points A, B et C.

b) Soit $E = t_{2\vec{IC}}(O)$, où $I(3)$. Déterminer l'affixe de E.

2) Soit D le point d'affixe $z_D = iz_E$. Montrer que $\vec{AB} \perp \vec{CD}$.

Exercice 5 :

Soit $Z = \dfrac{z}{1+iz}$; $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$.

1) Donner la forme cartésienne de Z pour $z = 2i$, puis pour $z = 1+i$.

2) Montrer que si z est imaginaire pur alors Z est imaginaire pur.

3) On considère les points $M(z)$; $N(1+iz)$ et $B(i)$; $z \neq i$.

Déterminer l'affixe du point M pour que OMNB soit un #.

Exercice 6 :

Dans le plan complexe rapporté à un R.O.N direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) Placer les points $A(1+4i)$; $B(3+3i)$; $C(2+i)$ et $D(2i)$.

2) Montrer que ABCD est un carré.

Exercice 7 :

Soit $z' = \dfrac{z-1}{1-\bar{z}}$; $z \neq 1$.

Montrer $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est un réel et que $\dfrac{z'+1}{z-1}$ est imaginaire pur.

Exercice 8 :

Dans le plan complexe rapporté à un R.O.N.D $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $a = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $b = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$

1) Calculer $|a|$ et $|b|$. En déduire une construction de A et B.

2) Soit $M(z)$ avec $z = a+b$. Montrer que OBMA est un carré

Exercice 9 :

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un R.O.N.D du plan. On considère les points $A(1)$ et $B(-i)$

À tout point $M(z)$ tel que $z \neq -i$; on associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = \dfrac{1-z}{1-iz}$.

1) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que : $z' \in \mathbb{R}$.

2) " " " " : $z' \in i\mathbb{R}$.

3) " " " " : $|z'| = 1$.

4) " " " "

5-a) Montrer que pour tout $z \neq -i$; $z' + i = \dfrac{-1+i}{z+i}$

b) En déduire que $BM \cdot BM' = \sqrt{2}$.

c) Montrer que si M appartient au cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$ alors le point M' appartient à un cercle que l'on déterminera.

Bon Travail