Exercice 1

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telle que :

$\frac{z-3i}{z+1}$ soit réel

$\frac{z-3}{z+i}$ soit imaginaire pur

$\frac{z+1}{z-1}$ soit réel

$\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = 2$

$\left|-i+\overline{z}\right| = \left|z-3i\right|$

$Arg z \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

$Arg(-2\overline{z}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

$Arg(\frac{-3}{\overline{z}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

$Arg(\frac{z}{\overline{z}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Exercice 2

Soient A et B les points d'affixes respectives i et 2, à tout point M d'affixe z $(z \neq 2)$ .On associe le point M' d'affixe z' défini par $z' = \frac{z-i}{iz-2i}$.

1) a) Montrer que $|z'| = \frac{AM}{BM}$.

b) En déduire que lorsque M décrit la médiatrice du segment $[AB]$ le point M' décrit un cercle que l'on déterminera.

2) On suppose que $z \neq i$ et $z \neq 2$.

a) Montrer que $Arg z' = Arg\frac{z-i}{z-2} - Arg i[2\pi]$.

b) En déduire que $\left(\vec{u}\,\hat{,}\,\overrightarrow{OM'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{BM}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AM}\right) - \frac{\pi}{2}(2\pi)$.

c) Montrer que si le point M' d'affixe z' est tel que z' est réel strictement positif alors ABM est un triangle rectangle.

Exercice 3 Soit f l'application de $P \setminus \{O\}$ dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{z^2-4}{2z}$.

1) a) Montrer que si $z \neq 2i$ on a l'égalité : $\frac{z'+2i}{z'-2i} = \left(\frac{z+2i}{z-2i}\right)^2$.

b) On désigne par A et B les points d'affixes respectives $2i$ et $-2i$. Justifier que $\left(\widehat{\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right)[2\pi]$ et que $\frac{M'B}{M'A} = \left(\frac{MB}{MA}\right)^2$. En déduire l'ensemble des points M pour lesquels z' est imaginaire pur.

2) Soit I le point d'affixe z_0 $-4+2i$ .Déterminer $\left(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}}\right)$ et $\frac{IB}{IA}$ .Déterminer et construire l'ensemble $E = \{M(z) \in P \text{ tel que } |z+2i| = 2|z-2i|\}$. construire l'image I' de I par f .

3) a) $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z' = 2i\sin\theta$ .On appelle z_1 et z_2 les solutions de (E) avec $\text{Re}(z_1) > 0$.

b) Ecrire sous forme trigonométrique z_1 et z_2 affixes respectives des points M_1 et M_2 .

c) Vérifier que $z_2 = -\overline{z}_1$. Montrer alors que BM_1M_2 est un triangle isocèle de sommet principal B .