4ème Maths et Sc ❄ Série N°02

# Nombres complexes

Prof : ✍ Masmoudi Radhouane ✍



## Exercice 1

Soit $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ ; $z_2 = 2(1-i)$ et $z = \dfrac{{z_1}^2}{z_2}$ .

1. Écrire les complexes $z_1$, $z_2$ et $z$ sous forme trigonométrique (ou exponentielle).
2. En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$.

## Exercice 2

On donne les complexes $z = 2\sqrt{3} + 2i$, $z' = (1+\sqrt{3}) + i(1-\sqrt{3})$ et $z'' = \dfrac{z}{z'}$.

1. Écrire $z''$ sous forme algébrique et trigonométrique.
2. Écrire $z$ et $z'$ sous forme trigonométrique ou exponentielle.
3. En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

## Exercice 3

Soit $z$ un complexe non nul.

1. Montrer que $\dfrac{2z-1}{z^2}$ est réel si et seulement si $(z = \bar{z}$ ou $2z\bar{z} = z + \bar{z})$ .
2. Déterminer l'ensemble $E$ des points $M(z)$ tels que : $2z\bar{z} = z + \bar{z}$.
3. On suppose que $2z\bar{z} = z + \bar{z}$ et soit $\theta \equiv arg(z)[2\pi]$ où $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ .

   Déterminer $\dfrac{2z-1}{z^2}$ en fonction de $\theta$.

## Exercice 4

Le plan complexe étant muni dun R.O.N.D $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit $z$ un complexe non nul. On considère les points $A(a = z)$ ; $B(b = \bar{z})$ et $C\left(c = \dfrac{z^2}{\bar{z}}\right)$.

1. On pose $r$ et $\theta$ le module et un argument de $z$. Exprimer en fonction de $r$ et $\theta$ le module et un argument de $b$ et $c$.
2. En déduire que pour chaque valeur de $z$ les points $A$, $B$ et $C$ appartiennent à un cercle de centre $O$.
3. Comment faut-il choisir $z$ pour que les points $A$, $B$ et $C$ soient deux à deux distincts.
4. Montrer que $AB = AC$

5. Déterminer les complexes $z$ pour que $ABC$ soit un triangle équilatéral.

## Exercice 5

$(O,\vec{u},\vec{v})$étant un R.O.N.D du plan. Soit $A(i)$ et $B(-2i)$. Soit lapplication $f$ de $P\backslash\{A\}$ dans $P\backslash\{B\}$; qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ telle que $z' = \dfrac{2z-i}{iz+1}$ .
On pose $r = |z-i|$ et $\theta \equiv arg(z-i)[2\pi]$.

1. Montrer que $(z'+2i)(z-i) = 1$.
2. Soient $r'$ et $\theta'$ le module et un argument de $z'+2i$.
   Exprimer $r'$ et $\theta'$ en fonction de $r$ et $\theta$.
3. Déterminer limage par $f$ du cercle $\zeta$ de centre $A$ et de rayon $1$. (On admet que $f$ est une bijection de $P\backslash\{A\}$ sur $P\backslash\{B\}$).
4. Soit $T$ le point daffixe : $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
   - a. Vérifier que $T \in \zeta$.
   - b. Déterminer une mesure en radian de langle $\left(\vec{u},\overrightarrow{AT}\right)$.
   - c. Construire alors $T$.

## Exercice 6

$(O,\vec{u},\vec{v})$étant un R.O.N.D du plan. Soit $A(i)$ et $B(2)$. Á tout point $M(z \neq 2)$ on associe le point $M'(z')$ telle que $z' = \dfrac{z-i}{iz-2i}$ .

1. Montrer que lorsque $M$ décrit la médiatrice de $[AB]$ le point $M'$ décrit un cercle que l'on précisera.
2. On suppose que $z \neq 2$ et $z \neq i$.
   - a. Montrer que BC $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM'}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}}) - \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.
   - b. En déduire que si $M \in (AB)$, le point $M'$ appartient à une droite que lon précisera.

## Exercice 7

$(O,\vec{u},\vec{v})$étant un R.O.N.D du plan. Á tout point $M(z \neq 0)$ on associe le point $M'(z')$ telle que $z' = \dfrac{-1}{\overline{z}}$ .

1. Exprimer $arg(z')$ en fonction de $arg(z)$.
2. En déduire que les points $O$, $M$ et $M'$ sont alignés.
3. Montrer que $\overline{z'+1} = \dfrac{1}{z}(z-1)$.
4. Soit $A(1)$ et $B(-1)$ et $\zeta$ le cercle de centre $A$ et de rayon $1$. On suppose que le point $M \in \zeta\backslash\{O\}$.
   - a. Montrer que $|z'+1| = |z'|$

ⓑ Construire le point $M'$ connaissant $M$ sur $\zeta\backslash\{O\}$.

## Exercice 8

Á tout complexe $z$ de module $1$ et $z \neq 1$, on associe $f(z) = \dfrac{z(z+1)}{(z-1)^2}$ .

1. Exprimer $\overline{f(z)}$ en fonction de $z$ et $f(z)$.
2. Déterminer $z$ pour que $f(z)$ soit réel.
3. Soit $\theta$ une mesure de largument de $z$ où $\theta \in ]0, \pi[$.
   - ⓐ Écrire $z+1$, $z-1$ et $(z-1)^2$ sous forme trigonométrique ou exponentielle.
   - ⓑ En déduire la forme trigonométrique de $f(z)$.
4. Soit $z = \dfrac{-5+11i\sqrt{3}}{14+8i\sqrt{3}}$.

   Écrire $z$ et $f(z)$ sous forme trigonométrique ou exponentielle.

Masmoudi Radhouane