Lycée Pilote de Sfax *A/S 2019-2020*	*Série N°1* *Nombres complexes*	*Mr : Mourad EL arbi* *$4^{ème}$ $Math_4$*

Dans tous les exercices le plan est muni d'un repére orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1 A tout point $M(z)$ on associe le point $M'(z')$ tel que $z' = \dfrac{z(1+i\bar{z})}{1+z\bar{z}}$.

On désigne par A le point d'affixe i et B le point d'affixe $-i$.

① Déterminer les points M confondus avec leurs images M'.

② Montrer que les points A, M et M' sont alignés.

③ a) Prouver que pour tout $z \in \mathbb{C}^* \setminus \{-i\}$, $\arg(z') \equiv \dfrac{\pi}{2} + \left(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MO}}\right)[2\pi]$.

b) En déduire que si M appartient au cercle de diamètre $[OB]$ privé de O et B, alors le point M' appartient à une droite à préciser.

Donner la construction du point M' image d'un point $M \in \mathscr{C}_{[OB]} \setminus \{O, B\}$.

④ a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, $(|z'-z| = |z'-i|)$ si et seulement si $(|z| = 1)$.

b) En déduire que si $M \in \mathscr{C}_{(O,1)} \setminus \{A\}$ alors M' est le milieu du segment $[AM]$.

2 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit I le point d'affixe 1 et $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[OI]$.

On désigne par A un point du plan d'affixe un nombre complexe a non réel.

Soit M un point d'affixe z non nul et M′ d'affixe az.

① a) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{M'O}, \overrightarrow{M'M}}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{a-1}{a}\right)[2\pi]$.

b) En déduire que OMM′ est un triangle rectangle en M′, si et seulement si, A appartient au cercle $\mathscr{C}$ privé des points I et O.

② Dans cette question M est un point de l'axe des abscisses distinct de O.

A est un point de $\mathscr{C}$ privé des points I et O.

a) Montrer que M′ appartient à la droite (OA).

b) En déduire que M′ est le projeté orthogonal de M sur la droite (OA).

3 Soit $Z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$. On considère les points M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives Z, Z^2 et Z^3.

① Montrer que les points M_1, M_2 et M_3 ne sont pas alignés.

② Soit H le point d'affixe $Z + Z^2 + Z^3$.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $\dfrac{e^{ix}-1}{e^{ix}+1} = i\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

b) Montrer que H est l'orthoc…

c) Déterminer la vale… …onscrit au triangle M_1…