Lycée Pilote de Sfax A/S 2019-2020	Série N°3 Nombres complexes	Mr : Mourad EL arbi $4^{ème}$ $Math_4$

Dans tous les exercices le plan est muni d'un repére orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1 ① Déterminer les racines quatrièmes du nombre complexe $u = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

② Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que pour tout $z \neq -i$,

$\dfrac{z-i}{z+i} = e^{i\theta}$ si et seulement si $z = -\text{cotan}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.

③ En déduire les solutions de l'équation $(E) : (z^2+1)^4 = u(z+i)^8$.

2 ① a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 - 2Z + (1+e^{i2\alpha}) = 0$ avec $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

b) On désigne par Z_1 la solution telle que $\text{Ré}(Z) = 1 + \sin(\alpha)$ et Z_2 l'autre solution.

Déterminer et construire l'ensemble des points M_1 d'affixe Z_1 lorsque α décrit $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

② a) Montrer que $\dfrac{Z_2}{Z_1} = i\cot g\left(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

b) Pour quelles valeurs de α, OM_1M_2 est un triangle rectangle en O avec $M_1(Z_1)$ et $M_2(Z_2)$?

c) Déterminer α pour que le triangle OM_1M_2 soit isocèle en O.

3 ① Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^3 = 2(-1+i\sqrt{3})\overline{Z}$

② Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système (S): $\begin{cases} |Z| = 1 \\ (Z-i)^3 = (\overline{Z}+i)^3 \end{cases}$

4 On considère dans $\mathbb{C}$, les équations :

$(E) : Z^3 - 2i\sqrt{3}\,Z^2 - 6Z + 3i\sqrt{3} = 0$ et $(E') : Z^3 + 2i\sqrt{3}\,Z^2 - 6Z - 3i\sqrt{3} = 0$.

① a) Vérifier que $i\sqrt{3}$ est une solution de (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

c) Donner l'écriture exponentielle de chacune des solutions de (E).

② En déduire les solutions de l'équation (E').

③ Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Montrer que les points images des solutions de (E) et de (E') forment un hexagone régulier.

5 ① On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ): $Z^2 - \left(4e^{i2\theta} + e^{-i\theta}\right)Z + 4e^{i\theta} = 0$, $\theta \in [0, \pi]$.

a) Vérifier que $e^{-i\theta}$ est une solution de (E_θ).

b) Déterminer l'autre solution de (E_θ).

② On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E'): $Z^8 + \left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{3i\sqrt{3}}{2}\right)Z^4 + 2(1+i\sqrt{3}) = 0$.

a) Montrer que Z est une solution de (E') si et seulement si Z^4 est une solution de $(E_{\frac{\pi}{3}})$.

b) En déduire les solution