Exercice 1 :Q.C.M.

Choisir la ou (les) bonne(s) réponse(s).

1) L'ensemble des points M(z) tels que $|z| = z$ est :
a)une droite b)un cercle, c)une demi droite.

2) l'ensemble des points M(z) tels que $|z| = z+\bar{z}$ est inclus dans :
a)un cercle b) une demi-droite c)deux droites

3)Si $|z|=\sqrt{2}$ alors a) $\bar{z} = \frac{2}{z}$; b) $\bar{z} = \frac{\sqrt{2}}{z}$; c) $\bar{z} = \frac{\sqrt{2}}{2z}$

4)Si z est un nombre complexe non nul d'argument $\frac{\pi}{6}$

alors un argument de $i\bar{z}$ est

a) $\frac{-\pi}{6}$; b) $\frac{\pi}{6}$; c) $\pi/3$

Exercice2 : Questions indépendantes :

1) Soient a, b et z trois nombres complexes distincts deux à deux et de module 1.

Montrer que $\frac{b}{a}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^2 \in IR_+^*$.

2) Déterminer le(s) nombre(s) complexe(s) z vérifiant
$$\begin{cases} |z-2| = |z| \\ \arg(z) \equiv \arg(z+1+2i) \quad [2\pi] \end{cases}$$

3) a et b deux nombres complexes non nuls.
Mque $\arg(a) \equiv 2\arg(b)$ $[2\pi]$ $\Leftrightarrow$ $\bar{a}b^2 \in IR_*^+$

4) Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes distincts.
Montrer que :

a) $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2+|z_2|^2)$.

b) $Ré[(z_1+z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)] = |z_1|^2 - |z_2|^2$.

c) $\begin{cases} |z| = |z'| = 1 \\ |2+zz'| = 1 \end{cases}$ Alors $zz' = -1$ (conjugués)

Exercice 3:

Soit $z' = \frac{z-1+2i}{2iz-4}$ où $z \neq -2i$

1)Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que z' soit réel.

2)Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que Z soit imaginaire.

3)Déterminer l'ensemble des points M(z) ; $|z'| = \frac{1}{2}$

4)Déterminer et construire l'ensemble des points M'(z')tels que |z|=2

Exercice 4:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé

$(o, \vec{u}, \vec{v})$ f : P-{A(-i)} → P-{A}:M (z) → M'(z');

$z' = \frac{1-z}{1-iz}$

1) Déterminer l'ensemble E des points M (z) tels que z' soit réel.

2) a) Montrer que pour tout $z \neq i$, $z'+i = \frac{-1+i}{z+i}$

b) M que AM.AM' $=\sqrt{2}$,

et $(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) = \frac{3\pi}{4}$ (2π)

c) Déterminer l'image du cercle C de centre A et de rayon 1 par f.

d) Déterminer l'image par f de l'ensemble Δ-{A}
Où Δ : y = x-1

Exercice 5:

1°) Soit φ un réel de [-π, π] et z le nombre complexe défini par: $z = \frac{1}{2}$ [sinφ + i (1 - cosφ)]

Déterminer, en fonction deφ, le module et un argument de z.

2°) φ est un réel de] 0, π [.
Déterminer le module et un argument des nombres complexes : $a = z - i$ & $b = \frac{z}{z-i}$

3°) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct. Soit les points M (a) et N (b).
Déterminer les ensembles décrits respectivement par les points M et N lorsque φ varie dans] 0, π [
Représenter ces ensembles.

Exercice 6 :

Déterminer l'ensemble des points M(z) ; tels que :

a)$\arg(z-2i) = \frac{\pi}{4}$ (2π) ;b)$\arg(\bar{z}-i) = -\frac{\pi}{3}$ (2π) ;

c)$\arg(z-2i) = \arg(-z)$ (2π),

f)$\arg(z-1+i) = \arg(-\bar{z}+1+i)$ (2π)

d)$|z-2i| = |\bar{z}+i|$, e)$(z+i)(\bar{z}-i)=9$

Exercice 7:

Soit $Z=1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})$

1)Ecrire Z^2 sous forme algébrique

2)Déterminer le module et un argument de Z^2

3)Déduire le module et un argument de Z

4)Donner les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$

Exercice 8 :

1°) Résoudre dans C, l'équation

(E_θ) : $z^2 - 2iz + 1 + 2\cos2\theta = 0$ où $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

On désigne par z' et z'' les solutions de (E_θ) telles que Im(z') < Im(z'').

2°) Dans le plan complexes rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$,
on considère les points M_1 et M_2 d'affixes

respectives $z_1 = 2\sin\theta + z'$ et $z_2 = 2i + \frac{z'}{z''}$.
Déterminer et construire l'ensemble des points M_1 et l'ensemble des points M_2 lorsque θ décrit $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Exercice 9 : (6points)
Les questions 1, 2, 3, 4, et 5 sont indépendantes

1) Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que $\left|z+\frac{1}{z}\right| = |z-i|$
2) Soit $z = \frac{i}{1+i\tan\theta}$; $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ Donner la forme exponentielle de z
3) On considère dans C l'équation à une inconnue z ,
(E) : $z^2 - 2i\sqrt{2}\,z - 2(1+i) = 0$
a)Résoudre dans C l'équation (E).
On désigne par z_1 et z_2 les solutions de (E) ;
($Ré(z_1) < 0$)
b)Donner la forme exponentielle de $\frac{z_1}{z_2}$
4) Montrer que si u et v sont deux racines troisièmes de $1+i\sqrt{3}$ alors u.v est une racine troisième de $4e^{i\frac{2\pi}{3}}$
5) Soient A(a) et B(b) deux points du cercle trigonométrique non diamétralement opposés.
a) Montrer que le nombre complexe $\frac{(a+b)^2}{ab}$ est un réel strictement positif.
b) Déduire que ;
$2\arg(a+b) = \arg(a) + \arg(b) + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$
6) Prouver que le produit des racines nièmes de l'unité est $(-1)^{n-1}$; $n \geq 2$.

Exercice 10 :

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^2 - (1+\sqrt{3})(1+i)z + 4i = 0$$

1) Résoudre (E)
2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$
On désigne par A et B les points d'affixes respectives :
$a = 1 + i\sqrt{3}$, $b = \sqrt{3} + i$
a) Montrer que l'ensemble des points d'affixe z vérifiant $z = \frac{1}{2}a\bar{z}$ est la droite (OB)
b) Soit M' un point d'affixe z' tel que $z' = a\bar{z} - b$ et M un point d'affixe z avec $z \neq b$
Montrer que $\frac{b^2}{(z'-b)(z-b)} = \frac{2}{|z-b|^2}$

c)Déduire que $[BO)$ est la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'})$

Exercice 11 :TN2012

Soit a un réel strictement positif.
1)Résoudre dans C : $z^2-(1+i)az+ia^2=0$
2)Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par A et B les points d'affixes respectives a et ia.
a) Quelle est la nature du triangle OAB ?
b) Déterminer l'affixe du point C tel que OACB soit un carré.
3) Soient P et Q les points du plan tels que les triangles OAP et AQC sont équilatéraux de sens direct.
a) Montrer que l'affixe du point P est $a(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$
b) Calculer l'affixe du point Q.
c) Montrer que les points B, P et Q sont alignés.

Exercice12 :TN2012 Scx:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$.
On désigne par C le cercle de centre O et de rayon 1 et par I et A les points d'affixes respectives 1 et $a=\sqrt{3}+i$
1)a)Donner la forme exponentielle de a
b) Construire le point A
2)Soit B le point d'affixe $b = \frac{a-1}{1-\bar{a}}$
a)Vérifier que $\bar{b}b = 1$. En déduire que le point B appartient à C.
b) Montrer que les points A, B et I sont alignés.
c) Construire alors le point B.
3) Soit θ un argument de b
Montrer que $\cos\theta = \frac{2\sqrt{3}-3}{5-2\sqrt{3}}$ et $\sin\theta = \frac{-2\sqrt{3}+2}{5-2\sqrt{3}}$

Exercice 13:

Soit $(o, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé direct du plan Complexe P et f l'application qui a tout point d'affixe z , associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z+iz\bar{z}}{1+z\bar{z}}$,
A(i) ; B(-i)
1) Déterminer les points fixes de f
2) Mque les points A, M et M' sont alignés
3) Soit C le cercle de diamètre [OB]
a) Mque $\forall M \in P-\{O,B\}$, $\arg(z') \equiv \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MO})$ $[2\pi]$

b) En déduire que si $M \in C$, alors le point M' appartient à une droite fixe Δ que l'on précisera .

c) Donner une construction du point M' image d'un point M de C.

Exercice 14:(6 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$

Soit f l'application du plan P \ { I } dans lui-même qui a tout point M(z) associe le point M'(f(z)) telle que $f(z) = z' = \frac{-1+z}{1-\bar{z}}$

1) Montrer que, pour tout $z \neq 1$, $|z'| = 1$,

2) Soient A et B deux points distincts d'affixes a et b différents de 1 et tels que f(A) = f(B)

a) Montrer $(a-1)(1-\bar{b}) = (1-\bar{a})(b-1)$

b) Déduire que les points A, B et I sont alignés.

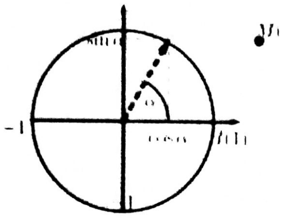
3) Soit α, un réel appartenant à $]0, 2\pi[$:

Montrer $f(e^{i\alpha}) = e^{i\alpha}$.

4) Etant donner un point M du plan d'affixe $z \neq 1$.

a) Montrer que si $z' \neq 1$ alors f(z) = f(z')

b) Déduire alors de ce qui précède une construction du point M'(z') puis le placer sur la figure ci-contre.



Exercice 15 : (3 points)

On considère $n \in IN$ telle que $n > 1$, $\theta \in IR$ et $a = e^{i\theta}$

Soient $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ les n racines de l'équations $z^n = a$

1) Montrer que les points du plan complexe dont les affixes sont : $(z_0+1)^n, (z_1+1)^n, \ldots, (z_{n-1}+1)^n$ sont alignés.

2) Calculer $S = z_0 + z_1 + \ldots + z_{n-1}$

3) Calculer en fonction de a le produit $P = z_0 . z_1 \ldots z_{n-1}$.

Exercice 16 (Bac 2015) :

1) a) Résoudre dans C l'équation :

(E) : $z^2 - 2z + 4 = 0$.

b) Déterminer une écriture exponentielle de chacune des solutions de (E).

2)Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le cercle (γ) de centre O et de rayon 2 et le point A d'affixe 2. Placer les points B et C d'affixes respectives $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

3)Soit $\theta \in]-\pi, \pi]$ et M le point du cercle (γ) d'affixe $2e^{i\theta}$. On désigne par N le point de tel que $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Justifier que N a pour affixe $2e^{i(\theta+\frac{\pi}{3})}$

4) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a)Vérifier que la rotation r a pour expression complexe ; $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2 - 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b) Soit F et K les milieux respectifs des segments [BM] et [CN]. Montrer que r(F) = K.

c) En déduire la nature du triangle AFK.

5)a)Montrer que $AF^2 = 4 - 2\sqrt{3}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$.

b) En déduire l'affixe du point M pour laquelle AF est maximale et construire le triangle AFK correspondant.

Exercice 17:(4 points)

On considère le polynôme P à variable complexe z défini par :

$P(z) = z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i)$.

1) Montrer que si z_1, z_2 et z_3 sont les racines du polynôme P alors $\sum_{k=1}^{3} \arg(z_k) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

2) Montrer que l'équation (E) : P(z) = 0 admet une solution imaginaire ib, où b est un réel à déterminer.

3) Déduire une factorisation du polynôme P(z).

4) Achever alors la résolution de l'équation (E).

5) Que peut-on dire du triangle dont les sommets ont pour affixes les trois solutions de (E). Justifier.

Exercice 18: (4 points)

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, soit l'application f du plan complexe dans lui-même qui au point M (z) associe le point M' (z') tel que : $z' = \frac{z+i\bar{z}}{2}$.

1) Montrer que l'ensemble D des points M (z) invariants par f est une droite.

2) a) Montrer que $\frac{z'-z}{1-i}$ est réel.

b) En déduire que la droite (MM') à une direction fixe.

3) Soit M un point du plan.

a) Montrer que: $f \circ f(M) = f(M)$.

b) Déduire des questions précédentes une construction du point M'.

4) Caractériser géométriquement l'application f.

Exercice 19 : (6 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1°) Résoudre dans C l'équation :

$(E) : z^2 - iz\left(1 - \cos(\theta).e^{i\theta}\right) + \cos(\theta).e^{i\theta} = 0$, $\theta \in IR$

2°) On considère les points A, B et M d'affixes respectives i, $\frac{i}{4}$ et $\frac{1}{i + \tan\theta}$, $\theta \in]\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$.

On note N le milieu du segment [AM].

a)Montrer que $z_N = \frac{1}{4}(\sin 2\theta + 2i\sin^2\theta)$

b)Prouver que, lorsque θ varie dans $]\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$, le point N varie sur le cercle Γ de centre B et de rayon $R = \frac{1}{4}$ privé d'un point à déterminer.

c)En déduire l'ensemble des points M, lorsque θ varie dans $]\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$.

d)Ecrire z_M sous forme exponentielle.

Exercice 20 (points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (o,) u, v

On considère les points A , B et C d'affixes respectives i , – i et $\sqrt{3}$. Soit f l'application du plan P privé du point B dans P qui à tout point M d'affixe z, (z ≠ -i) associe le point M' d'affixe $z' = \frac{iz+1}{z+i}$

1) Déterminer le module et un argument de z' dans chacun des cas :

a) z = tan(θ),$\theta \epsilon]0, \frac{\pi}{2}[$; b) z = $e^{i\theta}$, $\theta \epsilon] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

2)a) Montrer que ABC est un triangle équilatéral direct.

b) Construire le point C puis tracer le cercle C circonscrit au triangle ABC. (unité 2 cm)

3) a) Justifier que A est l'unique point qui n'a pas d'antécédent par f.

b) Montrer que pour tout nombre complexe z non nul et distinct de i et de –i on a : $\frac{z'+i}{z'-i} = iz$

c) L'axe des réels recoupe C en N. Construire l'antécédent S de N par f.

4) Résoudre dans chacune des équations suivantes :

a) (E) :$\frac{iz+1}{z+i} = ie^{i\theta}z + i - e^{i\theta}, \theta \epsilon] -\pi, \pi]$.

b) (E2) :$\frac{1+iz}{i+z}$ =1+z²

Exercice n° : 21 (6 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$). (Unité graphique 4 cm)

On considère le nombre complexe $m = \frac{1-e^{i\theta}}{2(1+e^{i\frac{\theta}{2}})}$ où $\theta \in]0, 2\pi[$

On désigne par A et M les points d'affixes respectives $\frac{1}{2}$ et m.

1) Déterminer le module et un argument de m

2) Déterminer et représenter l'ensemble des points M lorsque θ varie.

3) Soit N le point d'affixe n=$\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)e^{i\frac{\theta}{4}}$ où $\theta \in]0, 2\pi[$

Quelle est la nature du quadrilatère OMIN ?

4) Soit B le point d'affixe $\frac{-1}{2}$

Déterminer m pour que ABM soit un triangle rectangle en M.

5) Résoudre dans C l'équation (E) :

$4z^2 + 2e^{i\frac{\theta}{2}}z - 1 + e^{i\frac{\theta}{2}} = 0$

Exercice 22 : (6 points)

On donne l'équation (E_α):

$z^2 - (1 + i)e^{i\alpha}z + ie^{i2\alpha} = 0$ avec $\alpha \in [0; 2\pi[$.

1) a) Vérifier que $e^{i\alpha}$ est une solution de l'équation (E_α).

b) Trouver alors l'autre solution de l'équation (E_α).

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (o, $\vec{u}, \vec{v}$) on considère les points M1 et M2 d'axes respectives z1 et z2, avec z1 = $e^{i\alpha}$ et z2 = i$e^{i\alpha}$_.

a) Montrer que le triangle OM1M2 est rectangle et isocèle.

b) On pose Z = z1 + z2. Ecrire Z sous forme exponentielle.

c) Soit I = M1 *M2. Montrer que lorsque α varie dans [0; 2π[le point I décrit un cercle (C) de centre O et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) Montrer que la droite (M1M2) est tangente à (C).

3) On suppose que $\alpha \in [0; \pi[$.

a) Montrer que (u, M_1M_2) = $\alpha + \frac{3}{4}\pi\ [2\pi]$

b) En déduire la valeur de α pour laquelle la droite (M1M2) est parallèle à l'axe (O, v)

c) Soit A le point d'axe zA = 1 + i. Placer les points A, M1 et M2, pour la valeur trouvée de α.

d) Calculer alors l'aire du triangle AM1M2.

4) Soient z un nombre complexe et le système

$(S) : \begin{cases} |z| = |z - 2i| \\ \arg(z^2) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} ; k\epsilon Z$

a) z_A est-il solution du système (S) ?

b) Déterminer et construire l'ensemble D={M(z) tel que arg(z²) = $\frac{\pi}{2}[2\pi]$

c) Résoudre le système (S).

Exercice 23 : TN 2016 Sc :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (o, $\vec{u}, \vec{v}$) .On considère les points A et B d'affixes respectives a= $2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et b =$2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

1) a)Construire les points A et B

b)Ecrire a et b sous forme algébrique.

2) La droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par A et la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par B se coupent en un point C.

a) Déterminer l'affixe c du point C.

b) Vérifier que $c^2=1+2i\sqrt{6}$.

3) On considère le point D d'affixe c^2.

a) Montrer que OD = 5.

b) En déduire une construction du point D.

4) Résoudre dans C, l'équation ; $2z^2-2z-i\sqrt{6}=0$.
On désigne par z_1 la solution dont la partie réelle et la partie imaginaire sont positives et par z_2 l'autre solution.

5) Soient les points I, M_1 et M_2 d'affixes respectives 1, z_1 et z_2.

a) Justifier que le point M_1 est le milieu du segment [IC].

b) Montrer que le quadrilatère OCM_1M_2 est un parallélogramme.

c) Construire les points M_1 et M_2.

Exercice 24 :TN 2016

On considère dans C l'équation :

(E) $z^2-(1+2i)mz-(1-i)m^2=0$, où m est un nombre complexe non nul d'argument $\theta\in]0,\pi[$.

1)a) Résoudre dans C l'équation (E).

On note z_1 et z_2 les solutions de (E).

b)Montrer que (z_1z_2 est un réel strictement positif) ssi $\theta=\frac{5}{8}\pi$.

2)Vérifier que $z_1z_2=|m|^2\sqrt{2}$.

3) Soit t un réel strictement positif et $m=\frac{\sqrt{t}}{\sqrt[4]{2}}e^{\frac{5\pi}{8}i}$. On se propose de construire les points M_1 et M_2 images des solutions z_1 et z_2 de (E). Correspondant au nombre complexe m.

Dans la figure ci-dessous $(o,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé direct. B et C sont les points d'affixes respectives $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et t.

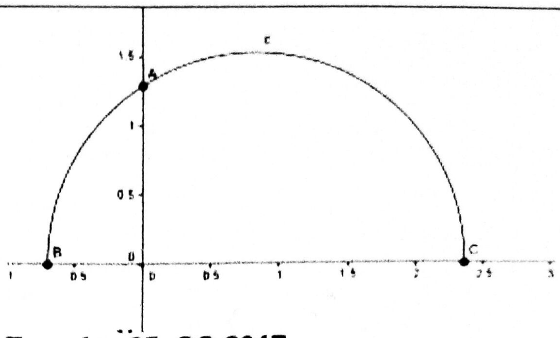
E est le point d'intersection du demi cercle C de diamètre [BC] avec l'axe (O, v)

a)Montrer que $OE^2=OB.OC$

b) En déduire que $|m|=OE$

4) a)Construire le point A d'affixe m.

b)En déduire une construction des points M_1 et M_2 images des solutions z_1 et z_2 de l'équation (E) (On convient que $|z1|<|z2|$



Exercice 25: SC 2017

1) Déterminer les racines cubiques de $2\sqrt{2}$.

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$. A ($-\sqrt{2}$ i) et D($2\sqrt{2}$ i)

a) Construire les points B et C d'affixes respectives $\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) Montrer que les droites (BC) et (AD) sont perpendiculaires.

c) Montrer que ABDC est un losange.

B) Soit $\alpha\in IC^*$. M N et P sont les points d'affixes respectives $z_M=\alpha, z_N=\alpha e^{i\frac{2\pi}{3}}$ $et\ z_P=\alpha e^{i\frac{-2\pi}{3}}$.

1) a) Calculer $z_N^3\ et\ z_P^3$

b) En déduire que la nature de MNP

2) Soit Q(α^3)

a) Mque MNPQ est un losange ssi $\alpha^3=-2\alpha$

b) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles MNPQ est un losange.

Exercice :26 TN 2017

Soit dans C l'équation (E) :$z^2-\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+1=0$.

1)a) Justifier que (E) a deux solutions distinctes.

b) Déterminer z_1+z_2. En déduire que les solutions ne sont pas conjuguées. z_1 la solution telle que $|z_1|>1$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A , B, I et J d'affixes respectives z_1, z_2 , 1 et -1.

2) a) Soit C le milieu du [AB]. Déterminer l'affixe de C.

b) En utilisant $(z_2-z_1)^2=(z_2+z_1)^2-4z_1z_2$, montrer que $(z_2-z_1)^2=4(z_c^2-1)$.

c) Montrer que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CI})+(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CJ})=0[2\pi]$

En déduire que (AB) porte la bissectrice intérieure de l'angle ICJ.

3) Soit C le cercle circonscrit du IAJ. On note K le centre de C et z_k l'affixe du point K.

a) Prouver que K est un point de l'axe $(o,\vec{v})$.

On pose z_k = iy où y non nul.

b) Soit M un point du plan d'affixe z.
Justifier que $M \in C$ ssi $|z-iy|^2 = |1-iy|^2$
En déduire que $M \in C$ ssi $z\bar{z} + iy(z-\bar{z}) = 1$.
c) En remarquant que $z_1 = \frac{1}{z_2}$, montrer que $B \in C$.

4)a) Construire le point C dans le repère $(o, \vec{u}, \vec{v})$.
b)Construire la droite (AB) est la médiatrice du [AB].
c) Déduire une construction des points A et B, image des solutions de (E).

Exercice 27TN 2018 (sc inf contole)):
1) Résoudre dans l'ensemble C des nombres complexes , (E) :$z^2-(1+i)z+i=0$
2) a- Montrer que pour tout z non nul,
$z + \frac{1}{z} = 1 \Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0$
b-Résoudre alors dans C non les deux équations :
$z + \frac{1}{z} = 1$ et $z + \frac{1}{z} = i$.
3) On considère le polynôme
$P(z) = z^4 - (1+i)z^3 + (2+i)z^2 - (1+i)z + 1$
a-Vérifier, que pour tout nombre complexe z non nul on a :$\frac{P(z)}{z^2} = \left(z+\frac{1}{z}\right)^2 - (1+i)\left(z+\frac{1}{z}\right) + i$
b- Résoudre alors dans C, en posant Z= $z + \frac{1}{z}$,
l'équation P(z)=0.

Exercice 28 : TN 2018 (Maths contrôle):
1) On considère, dans C, (E) :$z^2 - (1+i)z - i = 0$
Résoudre (E) on note z_1 et z_2, les solutions de (E).
2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$, on désigne pa A,B,M et M les points d'affixe respectives 1,i ; z_1 et z_2.
Soit z distinct de 1,i ; z_1 et z_2.
On note M et M' les points d'affixes respectives z et $z' = \frac{z+i}{z-i}$
Justifier que les points M et M' sont distincts.
Dans la suite de l'exercice on prend $z = i + 2e^{i\theta}$; où θ est un réel.
3)a) Montrer que M décrit le cercle γ de centre B et de rayon 2.
b) Montrer que $z' = 1 + ie^{-i\theta}$.
c) M que AM'=1 et que $(\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) \equiv \frac{\pi}{2} - \theta[2\pi]$
d) Déterminer l'ensemble des points M lorsque le point M décrit le cercle γ. .
4) Soit P le milieu du segment [MM'] et z_P son affixe.
On désigne par Q le point d'affixe $z_Q = e^{i\frac{\pi}{4}} z_P$.
a)Vérifier que $z_p = \frac{1+i+2e^{i\theta}+ie^{-i\theta}}{2}$
b) En déduire que $z_Q = \frac{i\sqrt{2}+2e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})} + ie^{-i(\theta+\frac{\pi}{4})}}{2}$
c)Montrer alors que :
$z_Q = \frac{1}{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right)$

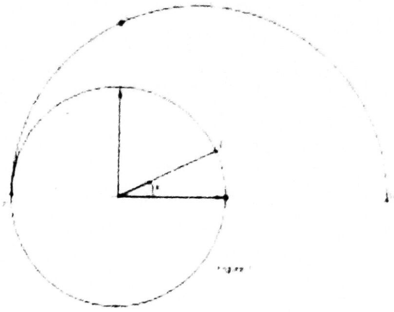
Exercice 29 :(Complexe)
Les parties A et B sont indépendantes :
Partie A/:(5 points)
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
I/ On considère dans C l'équation :
(E) :$iz^2 + (2-i)az - (1+i)a^2 = 0$.
où a est un nombre complexe non nul.
1) Déterminer z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E).
2) Montrer que :
$z_1 z_2$ est un nombre réel $\Leftrightarrow$
$\arg(a) = \frac{-3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$ où $k \in Z$.
II/ Soit c un nombre réel non nul et z un nombre complexe non nul.
On considère les points A, B, C, D et M d'affixes respectifs : $1,\ 1+i,\ c,\ ic\ et\ z$.
1) a) Montrer que :
A, D et M sont alignés $\Leftrightarrow$ $(1+ic)z + (ic-1)\bar{z} = 2ic$.
b) Montrer que :
(AD) ⊥ (OM) $\Leftrightarrow (1+ic)z - (ic-1)\bar{z} = 0$.
2) Soit h l'affixe du point H, le projeté orthogonal du point O sur (AD).
a) Montrer que : $h - (1+i) = \frac{i}{c}(h-c)$.
b) En déduire que (CH) ⊥ (BH).
Partie B/ : (3 points)
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
1) Résoudre dans l'ensemble de nombre complexe le système suivant : $\begin{cases} 2a - b = -3 \\ 2\bar{a} + \bar{b} = -3 - 2i\sqrt{3} \end{cases}$
2) On considère les points A, B, C d'affixes respectives :
$Z_A = \frac{-3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $Z_B = \overline{Z_A}$ et $Z_A = Z_C e^{i\frac{\pi}{3}}$.
Prouver que : $\left(\frac{Z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2017} + \left(\frac{Z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1957} - \left(\frac{Z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1982}$ est réel.
3) Soit D le point d'affixe $Z_D = 1 + i$.
Ecrire $\frac{Z_A}{Z_D}$ sous forme algébrique puis déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice 30: TN 2018 (Sc contrôle)

1) Résoudre dans C : (E) : $z^2 - i\sqrt{3}z - 1 = 0$.
(On donnera les solutions sous forme exponentielle)
2) Pour tout $z \in C$, on pose
$P(z) = 3z^4 - 7i\sqrt{3}z^3 - 18z^2 + 7i\sqrt{3}z + 3$.
a) Vérifier que $i\sqrt{3}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}}$ sont deux zéros de P.
b) Montrer que pour tout z ≠ 0 ; $P\left(\frac{-1}{z}\right) = \frac{1}{z^4}P(z)$.
c) En déduire que les nombres $\frac{\sqrt{3}}{3}i$ et $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ sont deux solutions de l'équation P(z)=0.
3) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$). On désigne par A , B et C les points d'affixes respectives $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $3e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
a) Construire les points A, B et C.
b) Construire le point D défini par $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ et donner son affixe sous la forme cartésienne
c) La parallèle à la droite (BD) passant par A coupe la droite (OD) au point E.
Déterminer l'affixe du point E.

Exercice 31 : TN 2018 PR

Soit θ un réel non nul.
Dans la figure 1 ci-dessous .
(o, $\vec{u}$, $\vec{v}$) est un repère orthonormé direct.
C est le cercle de entre O et de rayon 1.
E est le point de C tel que ($\vec{u}$, $\overrightarrow{OE}$)≡ θ (2π).
F et G sont les points d'affixes respectives ,
-1 et $1 + \sqrt{2}$
γ est le demi- cercle de diamètre [FG].
D est le point d'intersection de et l'axe (O, $\vec{v}$).
1) a) Vérifier que OD² =1 + $\sqrt{2}$
b) Soit A le point d'affixe $z_A = i\sqrt{1+\sqrt{2}}\,e^{i\theta}$.
Vérifier que z_A = OD$e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$. Construire alors le point A.
2) On considère dans C l'équation :
(E) : $z^2 + \frac{\sqrt{2}}{i\sqrt{1+\sqrt{2}}}e^{i\theta}z + e^{i2\theta} = 0$.
a) Vérifier que z_A est une solution de (E).
b) On désigne par z_B le point d'affixe z_B, où z_B est la deuxième solution de (E). Déterminer z_B.
3) a) Montrer que O, A et B sont alignés.
b) Placer le point C d'affixe z_C = OD$e^{i\theta}$.
c) Montrer que $\frac{aff(\overrightarrow{AC})}{aff(\overrightarrow{AB})} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$.
En déduire que le triangle ABC est isocèle et que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{4}(2\pi)$. Construire alors le point B.



Exercice 32 : TN 2018 SC X PR

1) Résoudre dans C, l'équation :
(E) :$z^2 - i\sqrt{3}z - 1 = 0$.
(On donnera les solutions sous forme exponentielle).
2) Pour tout $z \in C$, on pose
$P(z) = 3z^4 - 7i\sqrt{3}z^3 - 18z^2 + 7i\sqrt{3}z + 3$
a) Vérifier que P($i\sqrt{3}$) = 0 et que $P(e^{i\frac{\pi}{3}}) = 0$
b) Montrer que pour tout nombre complexe non nul z, $P\left(\frac{-1}{z}\right) = \frac{1}{z^4}.P(z)$
c) En déduire que les nombres $\frac{\sqrt{3}}{3}i$ et $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ sont deux solutions de l'équation P(z)=0.
3) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$). On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $e^{i\frac{\pi}{3}}$,$3e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{2\pi}{3}}$
a) Construire les points A, B et C.
b) Construire le point D défini par $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ et donner son affixe sous la forme cartésienne.
c) la parallèle à la droite (BD) passant par A coupe la droite (OD) au point E.
Déterminer l'affixe du point E.

Exercice 33 :Bac SC 2019:

1)Soit le nombre complexe a défini par
a = $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)(\sqrt{3} + i)$.
a)Ecrire a sous forme exponentielle.
b)Donner les valeurs exactes de cos($\frac{11\pi}{12}$) et sin($\frac{11\pi}{12}$).
2a) Vérifier que $a^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$.
b)En déduire les solutions de l'équation
(E) : $z^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$.
c)Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct et C le cercle trigonométrique.
.Placer les images de solutions de l'équation (E).

Exercice 34 :Bac Tech2019

Soit dans C l'équation (E) :

$z^2-(1+i\sqrt{3})(1-i)z+2\sqrt{3}=0$.

1)a) Montrer que (E) admet une solution d'argument $-\frac{\pi}{4}$ que l'on déterminera.

b)Déduire l'autre solution de l'équation (E).

2)Dans le plan complexe rapport à un repère orthonormé direct (o, u, v), on considère les points A, B et C d'affixes respectives

$z_A=1-i, z_B=\sqrt{3}+i\sqrt{3}$ et $z_C=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

a)Donner la forme exponentielle de chacun des nombres complexes z_A et $1+i\sqrt{3}$.

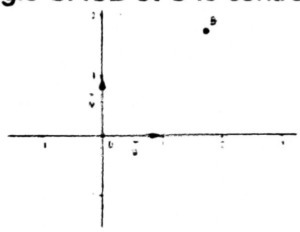
b)Vérifier que $z_B=(i\sqrt{3})z_A$ et que $z_A+z_B=z_C$.

c)Montrer que le quadrilatère OACB est un rectangle .

d)Dans la figure ci dessous on a placé le point B. Placer le point A et construire le point C.

3)Soit I le centre du rectangle OACB et G le centre de gravité du triangle OAI.

a)Montrer que $z_G=\frac{1}{3}(z_I+z_A)$.



b)Montrer que $z_G=\frac{\sqrt{3}}{6}(\sqrt{3}+i)z_A$.

c)Déduire la forme exponentielle de z_G.

Exercice35 :

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes C l'équation (E) : $z^2+iz+1+3i=0$.

En déduire les solutions de l'équation (F) :$z^2-iz+1-3i=0$.

2) Déduire alors l'ensemble des solutions dans C de l'équation (G) : $z^4+3z^2+6z+10=0$.

3) Dans le plan complexe, muni d'un repère orthonormé direct (O, u, v), on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives 1+2i , 1-2i, -1-i et -1 + i.

4) a)Placer les points A, B, C et D.

b) Montrer que ABCD est un trapèze.

c) Calculer l'aire de ce trapèze.

Exercice :36

1) Résoudre dans C l'équation :

$z^2+(5-i\sqrt{3})z+4-4i\sqrt{3}=0$.

1) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonrmé direct (O, u, v), on considère les points A, B et C d'affixes respectives

$z_A=-4, z_B=-1+i\sqrt{3}$ et $z_C=-iz_B$.

a) Montrer que le triangle OBC est isocèle .

b) Mettre z_B sous forme exponentielle et déduire que le point B appartient au cercle de centre O et de rayon 2.

c) Placer le point A et construire les points B et C.

2) Soit D le point d'affixe $z_D=(1-i)z_B$.

a) Montrer que le quadrilatère OCDB est un carré.

b) Montrer que aff ($\overrightarrow{AB}$) = $\sqrt{3}z_C$.

c) Déduire que les points A, B et D sont alignés.

d) Calculer l'aire du quadrilatère OADC.

Exercice 37 : Vrai ou Faux

1) Soit z un nombre complexe, tel que $|z|=1$ et $|1+z+\cdots+z^9|=1$ alors $z^9=1$ ou $z^{10}=1$

2) Soit z un nombre complexe non nul, et $n\in$ IN.

Si $z+\frac{1}{z}=2cos\theta$ alors $z^n+\frac{1}{z^n}=2cosn\theta$

3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$

ABC est un triangle dont O est le centre du cercle circonscrit, et a, b, c sont les affixes respectives des points A, B et C.

Alors le point H orthocentre du triangle ABC a pour affixe $a+b+c$.