

Lycée pilote de Tunis 	Isométries planes 2	<i>Terminales Maths</i>
Mr Ben Regaya. A	+ Eléments de corrections	www.ben-regaya.net

Exercice 1

IJK est un triangle rectangle isocèle en I et direct avec $IK = 1$. O et H sont les milieux respectifs de $[JK]$ et $[IJ]$.

R et R' les rotations de centres respectifs O et I et de même angle $\frac{\pi}{2}$.

- Montrer que $R' = S_{(OI)} \circ S_{(IJ)}$ et que $R = S_{(OH)} \circ S_{(OI)}$.
 - Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $R \circ R'$.
- Montrer que $S_{(IK)} \circ R \circ R'$ est une symétrie glissante.
 - Montrer que $f = S_{(IK)} \circ t_{\vec{JI}}$ est une symétrie orthogonale que l'on précisera.
- Considérons le repère orthonormé $\left(I, \frac{1}{IJ} \vec{IJ}, \frac{1}{IK} \vec{IK} \right)$ et g l'application plane qui au point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = 1 - x \\ y' = y \end{cases}$$
 - Montrer que g est une isométrie.
 - Donner les images par g des points H , O et J .
 - Déduire que $f = g$.

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point

$M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = -e^{2i\theta} \bar{z} + 4e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

- Montrer que f est une isométrie.
- Montrer que $f(M) = M \Leftrightarrow \operatorname{Re}(e^{i\theta} \bar{z}) = 2$.
 - En déduire que f est une symétrie orthogonale d'axe Δ_θ que l'on précisera.
 - Montrer que Δ_θ reste tangente au cercle (\mathcal{C}) de centre O et de rayon 2 quand θ varie.

Exercice 3

P est le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) et m est un paramètre complexe.

- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $(E) : (i-1)z^2 + (1-i)(m-i)z - 2(m-i)^2 = 0$.
 - Soient M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) .

Déterminer l'ensemble décrit par chacun des points M_1 et M_2 lorsque $|m|$ varie et $\arg(m) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$.



2. Soit l'application plane f qui a tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = (1+im)\bar{z} + (1-i)(m-i)$.

Montrer que f est une isométrie de P si et seulement si $m = i + e^{i\theta}$ où θ est un réel de $]-\pi, \pi]$.

3. On prend $m = i + e^{i\theta}$.

Soit $M(z)$ un point de P et soit $M'' = f \circ f(M)$.

a) Montrer que l'affixe z'' de M'' est $z'' = z + (1-i)(e^{i\theta} - i)$

b) En déduire que si $\theta \neq 0$ alors f n'admet aucun point invariant.

4. On prend $m = 1+i$.

Déterminer l'ensemble des points invariants par f puis caractériser f .

Exercice4

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit f l'application plane qui au point $M(x, y)$ associe le

point $M'(x', y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 2 \\ y' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 2 \end{cases}$$

1. a) Montrer que f est isométrie du plan.

b) déterminer l'ensemble des points invariants par f .

c) En déduire qu'il existe une droite (D) et un vecteur \vec{u} uniques tel que :

$$\vec{u} \text{ est un vecteur directeur de } (D) \text{ et } f = S_{(D)} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ S_{(D)}.$$

2. a) Déterminer les expressions analytiques de $f \circ f$.

b) Caractériser l'application $f \circ f$ et en déduire le vecteur \vec{u} .

c) Caractériser l'application $t_{-\vec{u}} \circ f$ et en déduire la droite (D) .



Lycée pilote de Tunis 	Isométries planes 2	<i>Terminales Maths</i>
Mr Ben Regaya. A	Éléments de corrections	www.ben-regaya.net

Exercice 1

1. a) $(IJ) \cap (OI) = \{I\}$ et $2(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IO}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc $R' = S_{(OI)} \circ S_{(IJ)}$

aussi $(OH) \cap (OI) = \{O\}$ et $2(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OH}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc $R = S_{(OH)} \circ S_{(OI)}$.

b) $R \circ R' = S_{(OH)} \circ S_{(OI)} \circ S_{(OI)} \circ S_{(IJ)} = S_{(OH)} \circ S_{(IJ)}$ car $S_{(OI)} \circ S_{(OI)} = id_P$

Or $(OH) \cap (IJ) = \{H\}$ et $(OH) \perp (IJ)$ donc $S_{(OH)} \circ S_{(IJ)} = S_H$. Ainsi $R \circ R' = S_H$.

2. a) $S_{(IK)} \circ R \circ R' = S_{(IK)} \circ S_{(OH)} \circ S_{(IJ)}$. Or les droites (IK) et (OH) sont parallèles et \overrightarrow{HI} est un vecteur normal à ces deux droites donc $S_{(IK)} \circ S_{(OH)} = t_{2\overrightarrow{HI}} = t_{\overrightarrow{JI}}$

On a donc $S_{(IK)} \circ R \circ R' = S_{(IK)} \circ R \circ R' = t_{\overrightarrow{JI}} \circ S_{(IJ)}$ et comme \overrightarrow{JI} est un vecteur directeur de (IJ) alors $S_{(IK)} \circ R \circ R'$ est une symétrie glissante.

b) On a $(IK) = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{JI}} \langle (OH) \rangle$ donc $t_{\overrightarrow{JI}} = S_{(IK)} \circ S_{(OH)}$ et par suite

$f = S_{(IK)} \circ t_{\overrightarrow{JI}} = S_{(IK)} \circ S_{(IK)} \circ S_{(OH)} = S_{(OH)}$ donc f est la symétrie orthogonale d'axe (OH) .

3. a) Soit $M(x_1, y_1)$ et $N(x_2, y_2)$ deux points du plan d'images respectifs M' et N' par g .

On a

$(M'N')^2 = (x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 = (1 - x_2 - 1 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = MN^2$ On a donc $M'N' = MN$ et g est une isométrie.

b) $H\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ son image est lui-même

$O\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ son image est lui-même

$J(1, 0)$ son image est I .

c) g fixe les points O et H et $g \neq id_P$ car $g(J) = I \neq J$ donc g est la symétrie orthogonale d'axe (OH) finalement $f = g$.

Exercice 2

Soient M et N deux points du plan d'affixes respectives z_1 et z_2 et on désigne par z_1' et z_2' les affixes de leurs images par f .

On a : $M'N' = |z_2' - z_1'| = |-e^{2i\theta}\overline{z_2} + 4e^{i\theta} + e^{2i\theta}\overline{z_2} - 4e^{i\theta}| = |(z_1 - z_2)e^{2i\theta}| = |(z_1 - z_2)| = |z_1 - z_2| = MN$.

Ainsi $M'N' = MN$ et donc f est une isométrie.

$f(M) = M \Leftrightarrow z = -e^{2i\theta}\overline{z} + 4e^{i\theta} \Leftrightarrow ze^{i(-\theta)} = -e^{i\theta}\overline{z} + 4$

$\Leftrightarrow ze^{i(-\theta)} + e^{i\theta}\overline{z} = 4 \Leftrightarrow e^{i\theta}\overline{z} + e^{i\theta}\overline{z} = 4 \Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(e^{i\theta}\overline{z}) = 4 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(e^{i\theta}\overline{z}) = 2$.

Conclusion : $f(M) = M \Leftrightarrow \operatorname{Re}(e^{i\theta}\overline{z}) = 2$.



b) Posons $z = x + iy$, x et y réels $e^{i\theta} \bar{z} = (\cos\theta + i\sin\theta)(x - iy) = x\cos\theta + y\sin\theta + i(x\sin\theta - y\cos\theta)$

Donc $\operatorname{Re}(e^{i\theta} \bar{z}) = 2 \Leftrightarrow x\cos\theta + y\sin\theta = 2$.

Or $x\cos\theta + y\sin\theta = 2$ est l'équation d'une droite étant donnée que $\cos\theta$ et $\sin\theta$ ne s'annulent jamais en même temps.

Conclusion l'ensemble des points invariants par f est la droite Δ_θ d'équation cartésienne : $x\cos\theta + y\sin\theta = 2$. f est alors une symétrie orthogonale d'axe Δ_θ .

c) Pour montrer que Δ_θ reste tangente au cercle (\mathcal{C}) de centre O et de rayon 2 quand θ varie il suffit que la distance de O à la droite Δ_θ soit égale au rayon du cercle.

$d(O, \Delta_\theta) = \frac{|0 \times \cos\theta + 0 \times \sin\theta - 2|}{\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}} = 2$. On rappelle que la distance d'un point I à une droite D d'équation

$$ax + by + c = 0 \text{ est } d(I, D) = \frac{|a \times x_I + b \times y_I + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Exercice 3

1. a) Résolution de l'équation (E) : $\Delta = -2i(m-i)^2 + 8(i-1)(m-i)^2 = (m-i)^2(6i-8) = (m-i)^2(1+3i)^2$
 $\Rightarrow \delta = (m-i)(1+3i)$.

Les solutions sont donc :

$$z_1 = \frac{-(1-i)(m-i) - (m-i)(1+3i)}{2(i-1)} = \frac{(m-i)(-2-2i)}{2(i-1)} = \frac{(m-i)(1+i)}{(1-i)} = \frac{(m-i)(1+i)^2}{2}$$

$$= i(m-i) = 1 + im.$$

$$z_2 = \frac{-(1-i)(m-i) + (m-i)(1+3i)}{2(i-1)} = \frac{2i(m-i)}{(i-1)} = m(1-i) - (1+i)$$

b) Posons $m = r e^{i\frac{\pi}{4}}$ avec r réel strictement positif.

$$z_1 = 1 + im = 1 + ir \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 - r \frac{\sqrt{2}}{2} + ir \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Si $z_1 = x + iy$ avec x et y réels alors l'égalité $z_1 = 1 - r \frac{\sqrt{2}}{2} + ir \frac{\sqrt{2}}{2}$ est équivalente à $\begin{cases} x = 1 - r \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = r \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} ; r > 0$

ce qui est équivalent à $y = 1 - x$, $y > 0$.

L'ensemble des points M_1 est la demi-droite d'équation : $\begin{cases} y = 1 - x \\ y > 0 \end{cases}$.

Pour le point M_2 : $z_2 = m - im - 1 - i = r \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - ir \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - 1 - i$ et après simplification

$$z_2 = m - im - 1 - i = 1 + r\sqrt{2} - i.$$



Si $z_1 = x + iy$ avec x et y réels alors l'égalité $z_2 = 1 + r\sqrt{2} - i$ se traduit par $x = 1 + r\sqrt{2}$
 $y = -1$; $r > 0$. L'ensemble des points M_2 est la demi-droite d'équation : $y = -1, x > 1$.

2. Soient M et N deux points du plan d'images respectives M' et N' par f .

f est une isométrie de P si et seulement $M'N' = MN$

$$M'N' = \left| (1+im)\overline{z_N} - (1+im)\overline{z_M} \right| = \left| (1+im)(\overline{z_N} - \overline{z_M}) \right|$$

$$= \left| (1+im)(\overline{z_N} - \overline{z_M}) \right| = |1+im| |z_N - z_M| = MN \times |1+im|. \text{ Ainsi } f \text{ est une isométrie de } P \text{ si et seulement}$$

$$|1+im| = 1 \Leftrightarrow 1+im = e^{i\alpha}, \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow im = -1 + e^{i\alpha}, \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m = i - ie^{i\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow m = i + e^{i\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}, \alpha - \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$$

Conclusion : f est une isométrie de P si et seulement $m = i + e^{i\theta}$ où θ est un réel de $]-\pi, \pi]$. (θ est en fait la mesure principale de $\alpha - \frac{\pi}{2}$).

3. $m = i + e^{i\theta}, z' = \left(1 + i(i + e^{i\theta})\right)\overline{z} + (1-i)e^{i\theta} = ie^{i\theta}\overline{z} + (1-i)e^{i\theta}$.

et on a : $M'' = f \circ f(M)$

Par l'application $f: M \mapsto M_1$ avec $M_1(z_1 = ie^{i\theta}\overline{z} + (1-i)e^{i\theta})$ et M_1 a pour image par f le point M''

d'affixe $ie^{i\theta}\overline{z_1} + (1-i)e^{i\theta} \Rightarrow z'' = ie^{i\theta} \overline{(ie^{i\theta}\overline{z} + (1-i)e^{i\theta})} + (1-i)e^{i\theta}$

$$\Rightarrow z'' = ie^{i\theta} (-ie^{i\theta}z + (1+i)e^{-i\theta}) + (1-i)e^{i\theta} \Rightarrow z'' = z + i - 1 + (1-i)e^{i\theta} = z + (1-i)(e^{i\theta} - 1).$$

b) Si $\theta \neq 0$ alors $e^{i\theta} - 1 \neq 0$ et par suite f est une translation de vecteur non nul et donc f n'admet aucun point invariant.

4. $m = 1 + i$ donc $z' = (1 + i(1 + i))\overline{z} + (1 - i) = i\overline{z} + 1 - i$

M est invariant par $f \Leftrightarrow f(M) = M \Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow i\overline{z} + 1 - i = z \Leftrightarrow i(x - iy) + 1 - i = x + iy$ avec $z = x + iy$,

$$x \text{ et } y \text{ réels} \Leftrightarrow y + 1 + i(x - 1) = x + iy \Leftrightarrow \begin{cases} y + 1 = x \\ x - 1 = y \end{cases} \Leftrightarrow y = x - 1.$$

l'ensemble des points invariants par f est la droite $\Delta: y = x - 1$ et par suite comme f est une isométrie alors

$$f = S_{\Delta}.$$

Exercice 4

1. Posons $z = x + iy$, x, y réels et $z' = x' + iy'$, x', y' réels.

$$z' = x' + iy' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 2 + i\left(-\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 2\right) = \frac{3}{5}(x - iy) - \frac{4}{5}i(x - iy) + 2 + 2i = \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right)\overline{z} + 2 + 2i$$

$$M' = f(M) \Leftrightarrow z' = \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right)\overline{z} + 2 + 2i.$$

Montrons que f est une isométrie du plan.



Soient M et N deux points du plan d'affixes respectives z_1 et z_2 et on désigne par z'_1 et z'_2 les affixes de leurs images par f .

$$M'N' = |z'_2 - z'_1| = \left| \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \right) \overline{z_2} + 2 + 2i - \left(\left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \right) \overline{z_1} + 2 + 2i \right) \right|$$

$$= \left| \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \right) (\overline{z_2} - \overline{z_1}) \right| = |\overline{z_2} - \overline{z_1}| = |z_2 - z_1| \text{ On a donc } M'N' = MN \text{ et } f \text{ est une isométrie plane.}$$

b) Un point M est invariant par f signifie $f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 2 \\ y = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{5}x - \frac{4}{5}y + 2 = 0 \\ -\frac{4}{5}x - \frac{8}{5}y + 2 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 4y + 10 = 0 \\ -4x - 8y + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 2y = -5 \\ -x - 2y = -\frac{5}{2} \end{cases} \text{ . Ce système est impossible donc } f \text{ n'admet pas de point}$$

invariant.

c) f est une isométrie différente d'une translation sans points fixes donc f est une symétrie glissante. Il existe donc une droite (D) et un vecteur \vec{u} directeur de (D) uniques tel que : $f = S_{(D)} \circ t_{\vec{u}} = t_{-\vec{u}} \circ S_{(D)}$.

2. a) $M_1 = f(M) \Leftrightarrow z_1 = \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \right) \overline{z} + 2 + 2i$ et $M' = f(M_1) \Leftrightarrow z' = \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \right) \overline{z_1} + 2 + 2i$. Ainsi

$$M' = f \circ f(M) \Leftrightarrow z' = \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \right) \overline{\left(\left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \right) \overline{z} + 2 + 2i \right)} + 2 + 2i$$

$$\Leftrightarrow z' = \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \right) \left(\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i \right) z + 2 - 2i \right) + 2 + 2i \Leftrightarrow z' = z + \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \right) (2 - 2i) + 2 + 2i \Leftrightarrow z' = z - \frac{4}{5} - \frac{4}{5}i$$

b) on reconnaît l'écriture complexe de la translation de vecteur \vec{u} d'affixe $-\frac{4}{5} - \frac{4}{5}i$.

c) $M_1 = f(M) \Leftrightarrow z_1 = \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \right) \overline{z} + 2 + 2i$ et $M' = t_{-\vec{u}}(M_1) \Leftrightarrow z' = z_1 + \frac{4}{5} + \frac{4}{5}i$.

Ainsi $M' = t_{-\vec{u}} \circ f(M) \Leftrightarrow z' = \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \right) \overline{z} + 2 + 2i + \frac{4}{5} + \frac{4}{5}i \Leftrightarrow z' = \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \right) \overline{z} + \frac{14}{5} + \frac{14}{5}i$ c'est l'écriture complexe de $t_{-\vec{u}} \circ f$.

Mais $t_{-\vec{u}} \circ f = S_D$ et donc la droite (D) est tout simplement l'ensemble des points invariants par S_D .

Chercher le et conclure.

