Déplacement –antidéplacement

L'essentiel

Définition

On appelle déplacement toute isométrie qui conserve les mesures des angles orientés

On appelle antidéplacement toute isométrie qui change les mesures des angles orientés en leurs opposées

Théorème

- Une symétrie orthogonale change les mesures des angles orientés en leurs opposées
- La composée d'un nombre pair de symétries orthogonales conserve les mesures des angles orientés
- La composée d'un nombre impair de symétries orthogonales change les mesures des angles orientés en leurs opposée

Isométrie	Nature
Identité du plan	Déplacement
Rotation	Déplacement
Translation	Déplacement
Symétrie orthogonale	Antidéplacement
Symétrie glissante	Antidéplacement

Théorème

- La composée de deux déplacements est un déplacement
- La composée de deux antidéplacements est un déplacement
- La composée d'un déplacement et un antidéplacement est un antidéplacement
- La réciproque d'un déplacement est un déplacement
- La réciproque d'un antidéplacement est un antidéplacement

Théorème

Soit A, B, C et D des points du plan tels que $AB = CD$ et $A \neq B$ alors

- Il existe un unique déplacement qui envoie A sur C et B sur D
- Il existe un unique antidéplacement qui envoie A sur C et B sur D

Remarque

Si $[AB]$ et $[CD]$ sont deux segments isométriques alors il existe exactement quatre isométries qui envoie $[AB]$ sur $[CD]$

- Un unique déplacement qui envoie A sur C et B sur D
- Un unique déplacement qui envoie A sur D et B sur C
- Un unique antidéplacement qui envoie A sur C et B sur D
- Un unique antidéplacement qui envoie A sur D et B sur C

Conséquences

- Deux déplacements qui coïncident sur deux points sont égaux
- Deux antidéplacements qui coïncident sur deux points sont égaux

Théorème

Un déplacement f est parfaitement déterminé par la donnée de deux points distincts A et B et leurs images A' et B'. L'angle θ de f est une mesure de $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}\right)$

Conséquences

- Un déplacement d'angle nul est une translation
- Un déplacement d'angle θ non nul est une rotation d'angle θ

Théorème

La composée de deux déplacements d'angles θ et θ' est un déplacement d'angle $\theta + \theta'$

La réciproque d'un déplacement d'angle θ est un déplacement d'angle $(-\theta)$

Théorème

La composée d'une translation et une rotation d'angle θ est une rotation d'angle θ

La composée de deux rotations d'angles θ et θ' est

- Une rotation d'angle $\theta+\theta'$si $\theta+\theta' \neq 2k\pi, k \in \mathrm{Z}$
- Une translation si $\theta+\theta' = 2k\pi, k \in \mathrm{Z}$

Caractérisation d'un déplacement

Soit A, B, C et D quatre points du plan tels que $AB = CD$ et $AB \neq 0$

On se propose de déterminer l'unique déplacement f tels que$\begin{cases} f(A)=C \\ f(B)=D \end{cases}$

Soit θ une mesure de l'angle de f alors $\theta \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) [2\pi]$

Si $\theta = 2k\pi, k \in \mathrm{Z}$

Alors $f$est une translation de vecteur $\vec{u}$ et comme $f(A) = C$ alors $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$

Si $\theta \neq 2k\pi, k \in \mathrm{Z}$

Alors f est une rotation d'angle θ et de centre I

- Si les droites (AC) et (BD) ne sont pas parallèles alors I est intersection des médiatrices des segments $[AC]$ et $[BD]$
- Si les droites (AC) et (BD) sont parallèles alors I est intersection des droites (AB) et(CD)

Caractérisation d'un antidéplacement

Soit A, B, C et D quatre points du plan tels que $AB = CD$ et $AB \neq 0$

On se propose de déterminer l'unique antidéplacement f tels que$\begin{cases} f(A)=C \\ f(B)=D \end{cases}$

Si les segments les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont la même médiatrice Δ

Alors $f = S_{\Delta}$ comme est tant deux antidéplacements qui coïncides suivant deux points distincts

Si non

Alors $f$est une symétrie glissante de vecteur $\vec{u}$ et d'axe Δ

Soit I et J les milieux respectifs de $[AC]$ et $[BD]$

- Si $I \neq J$ alors $\Delta = (IJ)$ et comme $f(A) = C$ donc $t_{\vec{u}} \circ S_{(IJ)}(A) = C$

  Si de plus $S_{(IJ)}(A) = E$ ainsi $t_{\vec{u}}(E) = C$ d'où $\vec{u} = \overrightarrow{EC}$
- Si $I = J$ on essaye de déterminer un autre point de Δ ou on cherche a caractériser l'une des isométries $foS_{(AB)}$ ou $S_{(CD)} \circ f$
- Si B est le milieu $[AC]$ alors $B \in \Delta$ et comme $f(B) = D$ donc $\vec{u} = \overrightarrow{BD}$ et $\Delta = (BD)$

Cas particuliers si $B = C$ c'est-à-dire $\begin{cases} f(A)=C \\ f(C)=D \end{cases}$

Alors f est une symétrie glissante car $f \circ f(A) = D$ et $A \neq D$

- $\begin{cases} f \circ f = t_{2\vec{u}} \\ f \circ f(A) = D \end{cases}$ donc $2\vec{u} = \overrightarrow{AD}$ alors $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
- Δ est la droite passante par I et de vecteur directeur $\vec{u}$

Théorème

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M'd'affixe z'

Alors f est un déplacement si et seulement si il existe deux nombres complexes a et b tel que

$z' = az + b$ et $|a| = 1$

Dans ce cas

Si $a = 1$ alors f est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b

Si $a \neq 1$ alors f est la rotation de centre ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et d'angle $\theta \equiv \arg(a)[2\pi]$

Remarque

1) La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b à pour écriture complexe $z' = z + b$

2) La rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ à pour écriture complexe $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

Comprendre

Exercice1

Soit ABCD un rectangle de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

1) Déterminer les isométries qui transforment le segment $[AD]$ en le segment $[BC]$

2) Déterminer les isométries qui transforment le triangle ADB en le triangle BCD

Correction

1) On a $\begin{cases} AD = BC \\ AD \neq 0 \end{cases}$ alors il existe

Un unique déplacement f tel que $\begin{cases} f(A) = B \\ f(D) = C \end{cases}$

Un unique déplacement g tel que $\begin{cases} g(A) = C \\ g(D) = B \end{cases}$

Un unique antidéplacement h tel que $\begin{cases} h(A) = B \\ h(D) = C \end{cases}$

Un unique antidéplacement k tel que $\begin{cases} k(A) = C \\ k(D) = B \end{cases}$

Soit θ une mesure de l'angle de f alors $\theta \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}}\right) \equiv 0[2\pi]$ donc $f = t_{\vec{u}}$ et comme $f(A) = C$ alors $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ ainsi $f = t_{\overrightarrow{AC}}$

Soit θ' une mesure de l'angle de g alors $\theta' \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}}\right) \equiv \pi[2\pi]$ donc g est une symétrie centrale

Et comme $g(A) = C$ et O est le milieu de $[AC]$ alors $g = S_O$

On a$[AB]$ et $[DC]$ on la même médiatrice Δ donc $h = S_\Delta$ (deux antidéplacements qui coïncident suivant deux points distincts)

On a $[AC]$ et $[BD]$ n'ont pas la même médiatrice donc k est une symétrie glissante

Soit $\varphi = k \circ S_{(AD)}$

φ est un déplacement (la composée de deux antidéplacements)

Et comme $\varphi(A) = g(A) = C$ et $\varphi(D) = g(D) = B$ donc $\varphi = g$ comme étant deux déplacements qui coïncident suivant deux points distincts et par suite

$k = S_0 \circ S_{(AD)} = S_{(OI)} \circ S_{(OJ)} \circ S_{(AD)} = S_{(OI)} \circ t_{2\overrightarrow{DJ}} = S_{(OI)} \circ t_{\overrightarrow{DC}}$

or $\overrightarrow{DC}$ est un vecteur directeur de (OI) donc $(0I)$ est l'axe de k et $\overrightarrow{DC}$ est le vecteur de k

2) Soit ψ une isométrie qui transforment le triangle ADB en le triangle BCD alors $\psi([AD]) = [BC]$
Car ψ conserve les distances ainsi $\psi(B) = D$
$\psi([AD]) = [BC]$ donc $\psi = f$ ou $\psi = g$ ou $\psi = h$ ou $\psi = k$
Et comme $(B) \neq D$, $g(B) = D$, $h(B) = A \neq D$ et $k(B) \neq D$
alors g est l'unique isométrie qui transforment le triangle ADB en le triangle BCD

Exercice2

Le plan est rapporté a un repère orthonormé direct $\left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On considéré les points $A(a = 1)$, $B\left(b = e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$ et $C\left(c = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

1) Montrer que OACB est un losange
2) Soit f l'application du plan dans lui-même qui n'a tout point $M(z)$ Associe le point $M'(z')$ tel que $z' = e^{-i\frac{2\pi}{3}}z + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
Et Soit g l'application du plan dans lui-même qui n'a tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = e^{-i\frac{2\pi}{3}}\bar{z} + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f
b. Donner une mesure de $\left(\widehat{\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}}\right)$ puis déduire la droite Δ tel que $f = S_{\Delta} \circ S_{(AO)}$
c. Montrer que $g = f \circ S_{(AO)}$. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g

Correction

1) On a $\begin{cases} Aff\left(\overrightarrow{0A}\right) = 1. \\ Aff\left(\overrightarrow{BC}\right) = z_C - z_B = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \end{cases}$ donc $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$ et comme $0, A$ et B ne sont pas alignés et $\begin{cases} OA = |z_A| = 1 \\ OB = |z_B| = 1 \end{cases}$ donc OABC est un losange

2)a. z' est de la forme $az + b$ avec $\begin{cases} a = e^{-i\frac{\pi}{3}} \\ b = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$. $|a| = 1$ et $a \neq 1$

Donc f est la rotation de centre I d'affixe $\frac{b}{1-a} = \frac{\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1$ et d'angle $\theta \equiv \arg(a) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Ainsi f est la rotation de centre A et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$

b. $\left(\widehat{\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_0 - z_A}\right) \equiv arg\left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \equiv \arg\left(\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

On a $\begin{cases} (AO) \cap (AB) = \{A\} \\ \left(\widehat{\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ donc $S_{(AB)} \circ S_{(AO)} = R_{\left(A, -\frac{2\pi}{3}\right)} = f$

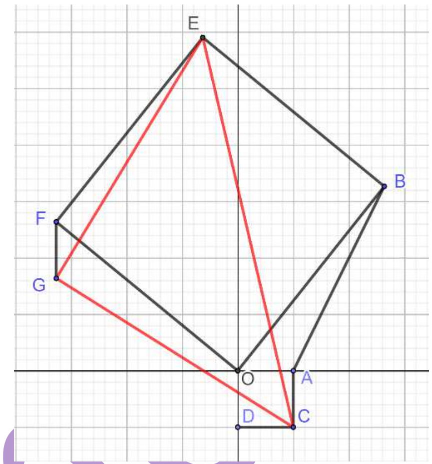
c. Remarquons que $(OA) = \left(0, \vec{i}\right)$
Soit $M(z)$ un point du plan $M_1(z_1) = S_{\left(0,\vec{i}\right)}(M)$ et $M'(z') = f(M_1)$

On a $\begin{cases} z_1 = \bar{z} \\ z' = e^{-i\frac{2\pi}{3}}z + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ donc $' = e^{-i\frac{2\pi}{3}}\bar{z} + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. alors $g = f \circ S_{(AO)}$.
Donc $g = S_{AB} \circ S_{(OA)} \circ S_{(OA)} = S_{(AB)}$

Exercice3

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct. On place, dans ce repère, les points A d'affixe 1, B d'affixe b où b est un nombre complexe dont la partie imaginaire est strictement positive.

On construit à l'extérieur du triangle OAB, les carrés directs $ODCA$ et $OBEF$ comme indiqué sur la figure ci-contre.



1) Déterminer les affixes c et d des points C et D.

2) On note r la rotation de centre O et d'angle.$\frac{\pi}{2}$

a. Déterminer l'écriture complexe de r.

b. En déduire que l'affixe f du point F est ib.

c. Déterminer l'affixe e du point E.

3) On appelle G le point tel que le quadrilatère $OFGD$ soit un parallélogramme. Démontrer que l'affixe g du point G est égale à $i(b-1)$.

4) Démontrer que $\frac{e-g}{c-g} = i$ et en déduire que le triangle EGC est rectangle et isocèle

Correction

1) $c = 1 - i$ et $d = -i$

2) a. r est l'application du plan dans lui-même qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'

tel que $z' - z_O = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_O)$ donc $z' = iz$

b. OBEF est un carre alors $\begin{cases} OB = OF \\ (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OF}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc $r(B) = F$ ainsi $z_f = iz_B$ d'où $f = ib$

c. OBEF est un carre alors $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OF}$ donc $e = b + f = b(1+i)$

3) $OFGD$ est un parallélogramme alors $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OD}$ donc $g = f + d = ib - i = i(b-1)$

4) $\frac{e-g}{c-g} = \frac{b(1+i)-i(b-1)}{1-i-ib+i} = \frac{b+i}{1-ib} = \frac{i(1-ib)}{1-ib} = i$ donc $e - g = i(c-g) = e^{i\frac{\pi}{2}}(c-g)$

Alors $r_{(G,\frac{\pi}{2})}(C) = E$ ainsi $\begin{cases} GC = GE \\ (\overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GE}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ et par suite le triangle EGC est rectangle et isocèle

S'entrainer

Exercice4

Le plan est rapporté a un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.Soit f l'application du plan dans lui même

Qui n'a tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que $\begin{cases} x' = 1 - y \\ y' = 1 + x \end{cases}$

1) Caractériser f
2) Soit $= f \circ S_{(O,\vec{i})}$.
   a. Déterminer l'expression complexe de g

   b. Montrer que g est une symétrie glissante que l'on caractérisera

Exercice 5

Le plan est orienté dans le sens direct .Soit ABC un triangle équilatéral tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit .Soit I le milieu de [AC] , On désigne par R la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$

1) Construire le point $E = R(A)$ puis montrer que ACBE est un losange
2) La perpendiculaire à (BC) passant par B coupe (AE) en J, montrer que $R(I) = J$
3) Soit M un point de l'arc orienté $\widehat{AB}\backslash\{A, B\}$ et soit N la point de [CM] tel que $AM = CN$
a) Montrer que $R(N) = M$
b) Vérifier que $MA + MB = MC$
4)La droite (BI) recoupe le cercle $\mathcal{C}$ en D .Soit $F = S_C(B)$
a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui transforme C en A et F en B
b) Caractériser f
5) Montrer que les points A , D et F sont alignés.

S'approfondir

Exercice6

Le plan est rapporté a un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.Soit f l'application du plan dans lui même

Qui n'a tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que $\begin{cases} x' = 1 - y \\ y' = 1 + x \end{cases}$

1) Caractériser f
2) Soit $= f \circ S_{(O,\vec{i})}$.
   a. Déterminer l'expression complexe de g

   b. Montrer que g est une symétrie glissante que l'on caractérisera

Exercice 7

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit ABCD un carré direct de centre O, $E = S_D(C)$, I le milieu [AD] , J le milieu [AE]

Et k le milieu [AB]

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui transforme E en C et D en B.

b) Caractériser f

2) On pose $g = t_{\overrightarrow{BA}} o f$. Déterminer $g(D)$ et $g(E)$ puis caractériser g

3) Soit $\Psi = fog$. Déterminer $\Psi(E)$ puis caractériser Ψ

4) Soit $h = S_{(OK)} og$

a) Déterminer $h(D)$ et $h(E)$ puis montrer que h est une symétrie glissante

b) Déterminer les éléments caractéristiques de h

5) On pose $\varphi = S_{(BD)} of^{-1}$

a) Vérifier que $f^{-1} = S_{(AE)} o S_{(AD)}$

b) Montrer que φ est une symétrie glissante dont on donnera la forme réduite

c) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\varphi(M) = f^{-1}(M)$

Exercice 8

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit $ABCD$ un carré direct de centre O, $E = S_A(B)$, $F = S_D(A)$, I le milieu $[AD]$, J le milieu $[DF]$ et, K le milieu $[AE]$

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui transforme E en B et A en C.

b) Caractériser f

2) a)On pose $g = S_C o f$. Déterminer $g(A)$ puis caractériser g

b) Soit $h = f^{-1} og$. Déterminer $h(A)$ puis caractériser h

c) Montrer qu'il existe un unique point M tel que $g(M) = f(M)$

3) Ψ l'antidéplacement tel que $\psi(B) = D$ et $\psi(D) = E$.

Montrer que Ψ est une symétrie glissante dont on donnera la forme réduite

4) Soit φ l'antidéplacement tel que : $\varphi(E) = C$ et $\varphi(D) = F$

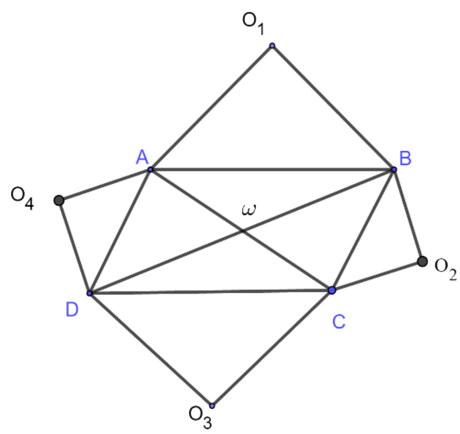
Montrer que φ est une symétrie glissante dont on donnera la forme réduite

5) Caractériser $\varphi \circ \psi$

Exercice 9

Sur la figure ci-contre ABCD est un parallélogramme de centre ω

Les triangles ABO_1, BCO_2, CDO_3 et DAO_4 sont des triangles rectangles isocèles directs de sommets principaux O_1, O_2, O_3 et O_4



On désigne par R_1, R_2, R_3 et R_4 les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs O_1, O_2, O_3 et O_4

1) a. Déterminer $R_2 \circ R_1(A)$, $R_3 \circ R_2(B)$ et $R_4 \circ R_3(C)$

b. Montrer que les trois isométries $R_2 \circ R_1$, $R_3 \circ R_2$ et $R_4 \circ R_3$ sont égale à une isométrie f que l'on caractérisera.

2) a. Montrer que $R_3 \circ R_2(O_1) = R_2(O_1)$ et déterminer $f(O_1)$

b. Montrer que $f(O_2) = O_4$ puis déduire la nature du quadrilatère $O_1O_2O_3O_4$

3) Soit Δ la médiatrice de $[AB]$. On pose $g = R_2 \circ S_\Delta$

a. Déterminer $g(A)$ et $g(O_1)$.

b. Montrer que g est une symétrie glissante

c. Construire $' = g(\omega)$. Déterminer les éléments caractéristiques de g

Exercice 10

Soit ABC un triangle rectangle en C tel que $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On désigne par $E = r^{-1}(B)$, $D = r(C)$ et I le milieu de $[DC]$

1)a. Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(A) = D$ et $f(C) = A$

b. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f

2) Soit $g = for$

a. Montrer que g est une translation

b. Soit $F = g(E)$. Montrer que $f(B) = F$ et en déduire la nature du triangle BIF

c. Montrer que les points C, A et F sont alignés

3) Soit $G = t_{\overrightarrow{AD}}(I)$

a. Montrer qu'il existe un unique antidéplacement φ tel que $\varphi(C) = D$ et $\varphi(I) = G$

b. Montrer que φ est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur

Exercice 11

Le plan est orienté dans le sens direct

Soit ABCD un losange de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AD]$

1) a. Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f tel que $f(A) = B$ et $f(B) = D$

b. Caractériser f

c. Déterminer l'image du triangle ABD par f

2) Soit S un antidéplacement qui transforme l'ensemble $\{A, B, D\}$ en $\{B, C, D\}$ et tel que $S(A) = C$

a. Déterminer l'image du segment $[BD]$ par S

b. En déduire que S est la symétrie orthogonale d'axe (BD)

3) Soit g un antidéplacement qui transforme l'ensemble $\{A, B, D\}$ en $\{B, C, D\}$ et tel que $g(A) = D$

a. Montrer que $g(D) = B$

b. Caractériser g

Correction des exercices

Correction4

Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$

1) On a $z' = 1 - y + i(1 + x) = 1 + i + i(x + iy) = 1 + i + iz$

z' est de la forme $az + b$ avec $\begin{cases} a = i \\ b = 1 + i \end{cases}$. $|a| = 1$ et $a \neq 1$

Donc f est la rotation de centre I d'affixe $\frac{b}{1-a} = \frac{1+i}{1-i} = i$ et d'angle $\theta \equiv \arg(a) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

2)a. Soit $M(z)$ un point du plan $M_1(z_1) = S_{(O,\vec{i})}(M)$ et $M'(z') = f(M_1)$

On a $\begin{cases} z_1 = \bar{z} \\ z' = iz_1 + 1 + i \end{cases}$ donc $z' = i\bar{z} + 1 + i$ alors g est l'application du plan dans lui-même qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = i\bar{z} + 1 + i$

b. g est un antidéplacement (la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement)

Soit $g(O) = O_1$ et $g(O_1) = O_2$ donc $z_{O_1} = 1 + i$ et $z_{O_2} = i(1 - i) + 1 + i = 2 + 2i$

$g \circ g(O) = 0_2$ et $O \neq O_2$ alors g est une symétrie glissante de vecteur $\vec{u}$ et d'axe Δ

D'une part $\begin{cases} gog = t_{2\vec{u}} \\ g \circ g(O) = O_2 \end{cases}$ alors $2\vec{u} = \vec{OO_2}$ donc $Aff(\vec{u}) = 1 + i$

D'autre part $g(O) = O_1$ donc I le milieu de $[OO_1]$ appartient à Δ ainsi Δ est la droite passant par I

Et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors $\Delta: x - y + c = 0$ et comme $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in \Delta$ donc $c = 0$

Ainsi $\Delta: y = x$

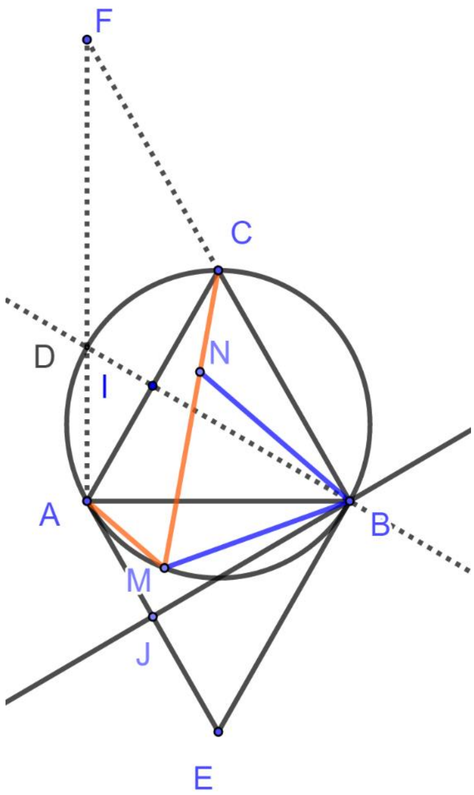
Correction5

1) $R(A) = E$ donc $\begin{cases} BA = BE \\ \left(\widehat{\vec{BA}, \vec{BE}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ alors le triangle ABE est équilatéral ainsi $AB = AE = BE$

Et comme le triangle ABC est équilatéral donc

$AB = AC = BC$ et par suite $AB = AE = BE = BC$

Il en résulte $ACBE$ est un losange



2) Le triangle ABE est équilatéral et $(BJ) \perp (AE)$ car

$\begin{cases} (BJ) \perp (BC) \\ (BC)//(AE) \end{cases}$ alors J est le milieu de $[AE]$

Et comme I est le milieu de $[AC]$ et $R([AC]) = [AE]$

donc $R(I) = J$

car une rotation conserve les milieux

3)a. Soit $R(N) = N'$

On a $\begin{cases} R(C) = A \\ R(N) = N' \end{cases}$ donc $\begin{cases} CN = AN' \\ \left(\widehat{\vec{CN}, \vec{AN'}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

Et comme

D'une part $CN = AM$

D'autre part $\left(\widehat{\overrightarrow{CN},\overrightarrow{AM}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CM},\overrightarrow{AM}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MA}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

Car M et B appartiennent à $\overset{\frown}{AC}$

Ainsi $\begin{cases} AN' = AM \\ \left(\widehat{\overrightarrow{CN},\overrightarrow{AN'}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CN},\overrightarrow{AM}}\right)[2\pi] \end{cases}$ il en résulte $N' = M$

b. $R(N) = M$ donc $\begin{cases} BN = BM \\ \left(\widehat{\overrightarrow{BN},\overrightarrow{BM}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ alors le triangle BNM est équilatéral donc $BM = MN$

Et comme $N \in [MC]$ donc $MC = MN + NC = AM + BM$

4)a. On a $\begin{cases} BC = CF \\ BC = AB \end{cases}$ donc $CF = AB$ or $AB \neq 0$ alors il existe un unique déplacement f tel que

$f(F) = B$ et $f(C) = A$

b. Soit θ une mesure de l'angle de f alors $\theta \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CF},\overrightarrow{AB}}\right) \equiv \pi + \left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right) \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

$\theta \neq 2k\pi, k \in$ Z alors f est une rotation d'angle $-\frac{2\pi}{3}$

Et comme $f(C) = A$ et $\begin{cases} DC = DA \text{ car } D \in (BI) \text{ la mediatrice de } [AC] \\ \left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA}}\right) \equiv \pi + \left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right) \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

alors D est le centre de f

5) D'un part on a C est le milieu de $[FB]$ et $CA = CB = CF$

donc le triangle ABF est rectangle en A

D'autre part le triangle ABD est inscrit dans $\mathcal{C}$ et $[BD]$ est un diamètre donc ABD est rectangle en A ainsi les points A,D et F sont alignes

Correction6

Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$

1) On a $z' = 1 - y + i(1 + x) = 1 + i + i(x + iy) = 1 + i + iz$

z' est de la forme $az + b$ avec $\begin{cases} a = i \\ b = 1 + i \end{cases}$. $|a| = 1$ et $a \neq 1$

Donc f est la rotation de centre I d'affixe $\frac{b}{1-a} = \frac{1+i}{1-i} = i$ et d'angle $\theta \equiv \arg(a) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

2)a. Soit $M(z)$ un point du plan $M_1(z_1) = S_{(0,\vec{i})}(M)$ et $M'(z') = f(M_1)$

On a $\begin{cases} z_1 = \bar{z} \\ z' = iz_1 + 1 + i \end{cases}$ donc $z' = i\bar{z} + 1 + i$ alors g est l'application du plan dans lui-même qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = i\bar{z} + 1 + i$

b. g est un antidéplacement (la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement)

Soit $g(O) = O_1$ et $g(O_1) = O_2$ donc $z_{O_1} = 1 + i$ et $z_{O_2} = i(1 - i) + 1 + i = 2 + 2i$

$g \circ g(O) = 0_2$ et $O \neq O_2$ alors g est une symétrie glissante de vecteur $\vec{u}$ et d'axe Δ

D'une part $\begin{cases} gog = t_{2\vec{u}} \\ g \circ g(O) = O_2 \end{cases}$ alors $2\vec{u} = \overrightarrow{OO_2}$ donc $Aff\left(\vec{u}\right) = 1 + i$

D'autre part $g(O) = O_1$ donc I le milieu de $[OO_1]$ appartient à Δ ainsi Δ est la droite passant par I

Et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ alors $\Delta: x - y + c = 0$ et comme $I\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \in \Delta$ donc $c = 0$

Ainsi $\Delta: y = x$

Correction7

1)a. On a $\begin{cases} ED = DC \\ CB = DC \end{cases}$ donc $ED = CB$ et comme $CB \neq 0$ alors il existe un unique déplacement f tel que $f(E) = C$ et $f(D) = B$

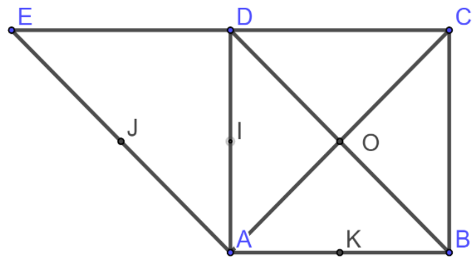
b. Soit θ une mesure de l'angle de f alors

$\theta \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{ED},\overrightarrow{CB}}\right) \equiv \pi + \left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ $\theta \neq 2k\pi, k \in$ Z alors f est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$

Soit ω le centre de f

(AD) est la médiatrice de $[EC]$ et (AC) est la médiatrice de $[BD]$

Donc $\omega \in (AD) \cap (AC)$ alors $\omega = A$ ainsi $f = r_{\left(A,-\frac{\pi}{2}\right)}$



2) On a $\begin{cases} f(D) = B \\ t_{\overrightarrow{BA}}(B) = A \end{cases}$ donc $g(D) = A$

$\begin{cases} f(E) = C. \\ t_{\overrightarrow{BA}}(C) = D \text{ car } ABCD \text{ est un carre alors } \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \end{cases}$ donc $g(E) = D$

g est la composée de deux déplacements donc g est un déplacement d'angle

$\theta' \equiv -\frac{\pi}{2} + 0 \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ .Alors g est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$

Soit ω' le centre de g

$\begin{cases} g \circ g = S_{\omega'} \\ g \circ g(E) = A \end{cases}$ donc ω' est le milieu de $[AE]$ ainsi $g = r_{\left(J,-\frac{\pi}{2}\right)}$

3) $\begin{cases} g(E) = D \\ f(D) = B \end{cases}$ donc $\psi(E) = B$

ψ est la composée de deux déplacements donc ψ est un déplacement d'angle

$\theta'' \equiv -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \equiv \pi[2\pi]$.Alors ψ est une symétrie centrale

Soit ω'' le centre de ψ comme $\psi(E) = B$ alors ω'' est le milieu de $[EB]$

On a $\begin{cases} \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \end{cases}$ donc $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AB}$ et comme I est le milieu de $[AD]$ donc I est le milieu de $[EB]$

Ainsi $\psi = S_I$

4) a. On a $\begin{cases} K \text{ est le milieu de} [AB] \\ OA = OB \end{cases}$ donc (OK) est la médiatrice de $[AB]$ alors $S_{(OK)}(A) = B$

$\begin{cases} g(D) = A \\ S_{(OK)}(A) = B \end{cases}$ donc $h(D) = B$

On a ABCD est un carré et (OK) est la médiatrice de $[AB]$ alors (OK) est la médiatrice de $[DC]$

$$\begin{cases} g(E) = D \\ S_{(OK)}(D) = C \end{cases} \text{ donc } h(E) = C$$

h est la composée d'un déplacement et un antidéplacement don h est un antidéplacement

supposons que $h = S_\Delta$ alors Δ est la médiatrice de $[DB]$ et $[EC]$ donc $(DB)//(EC)$ absurde

Ainsi h est une symétrie glissante . Soit $h = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ t_{\vec{u}}$

b. $\begin{cases} h(E) = C. \\ D \text{ est le milieu de } [EC] \end{cases}$ donc $D \in \Delta$ et comme $h(D) = B$ alors $\begin{cases} \vec{u} = \overrightarrow{DB} \\ \Delta = (DB) \end{cases}$

5) a. $\begin{cases} (AE) \cap (AD) = \{A\} \\ \left(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$ donc $S_{(AE)} \circ S_{(AD)} = r\left(A, \frac{\pi}{2}\right) = f^{-1}$

b. $\varphi = S_{(BD)} \circ S_{(AE)} \circ S_{(AD)} = t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{(AD)}$

car $\begin{cases} (AE)//(DB) \\ A \in (AE). \\ O \text{ est le projete orthogonal de } A \text{ sur } (DB) \end{cases}$ donc $S_{(BD)} \circ S_{(AE)} = t_{\overrightarrow{2AO}} = t_{\overrightarrow{AC}}$

Alors $\varphi = t_{\overrightarrow{AD}} \circ t_{\overrightarrow{DC}} \circ S_{(AD)} = t_{\overrightarrow{AD}} \circ S_{(OK)}$ car $t_{\overrightarrow{DC}} = S_{(Ok)} \circ S_{(AD)}$

Et comme $\overrightarrow{AD}$ est un vecteur directeur de (OK) alors $\overrightarrow{AD}$ est le vecteur de φ et (OK) son axe

c. Soit E l'ensemble des points M du plan tel que $\varphi(M) = f^{-1}(M)$

$$M \in E \Leftrightarrow \varphi(M) = f^{-1}(M) \Leftrightarrow S_{(BD)} \circ f^{-1}(M) = f^{-1}(M) \Leftrightarrow f^{-1}(M) \in (BD) \Leftrightarrow M \in f(BD)$$

F est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et $f(D) = B$ alors $f(BD)$ est la droite Δ qui passe par B et perpendiculaire à (BD) ainsi $E = \Delta$

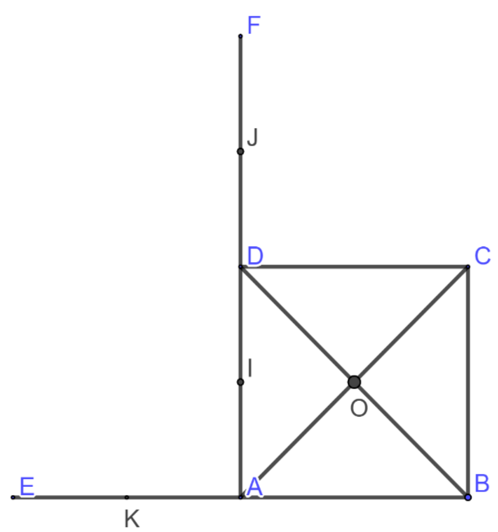
Correction8

1) a. On a $\begin{cases} EA = AB \\ CB = AB \end{cases}$ donc $EA = CB$ et comme $CB \neq 0$ alors il existe un unique déplacement f tel que $f(E) = B$ et $f(A) = C$

b. Soit θ une mesure de l'angle de f alors $\theta \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{BC}}\right) \equiv \pi + \left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\theta \neq 2k\pi, k \in Z$ alors f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$

Soit ω le centre de f



(AD) est la médiatrice de $[EB]$ et (DB) est la médiatrice de $[AC]$

Donc $\omega \in (AD) \cap (BD)$ alors $\omega = D$ ainsi $f = r_{\left(D,\frac{\pi}{2}\right)}$

2)a. $\begin{cases} f(A) = C \\ S_C(C) = C \end{cases}$ donc $g(A) = C$

g est la composée de deux déplacements donc g est un déplacement d'angle $\theta' \equiv \pi + \frac{\pi}{2} \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Alors g est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$

On a $g(A) = C$ et $\begin{cases} BA = BC \\ \left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc B est le centre de g ainsi $g = r\left(B, -\frac{\pi}{2}\right)$

b. On a $\begin{cases} g(A) = C \\ f^{-1}(c) = A \end{cases}$ donc $h(A) = A$

h est la composée de deux déplacements donc h est un déplacement d'angle $\theta'' \equiv -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \equiv \pi[2\pi]$

Alors h est une symétrie centrale et comme $h(A) = A$ donc $h = S_A$

c. Soit M un point du plan tel que $g(M) = f(M) \Leftrightarrow f^{-1} \circ g(M) = M \Leftrightarrow S_A(M) = M \Leftrightarrow M = A$

3) $\psi \circ \psi(B) = E$ et $B \neq E$ donc ψ est une symétrie glissante. Soit $\psi = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ t_{\vec{u}}$

D'une part $\begin{cases} \psi \circ \psi(B) = E \\ \psi \circ \psi = t_{2\vec{u}} \end{cases}$ donc $2\vec{u} = \overrightarrow{BE}$ alors $\vec{u} = \overrightarrow{BA}$

D'autre part $\psi(B) = D$ et O est le milieu de $[BD]$ donc $O \in \Delta$ alors Δ est la droite passant par O et de vecteur directeur $\overrightarrow{BA}$ ainsi $\Delta = (OI)$ en effet dans le triangle ABD on a O est le milieu de $[BD]$

et I est le milieu de $[AD]$ donc $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{IO}$

4) supposons que $\varphi = S_\Delta$ alors Δ est la médiatrice de $[DF]$ et $[EC]$ donc $(DF)//(EC)$ absurde

Ainsi φ est une symétrie glissante. Soit $\varphi = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ t_{\vec{u}}$

D'une part

On a $\begin{cases} \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \end{cases}$ donc $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{DC}$ et comme I est le milieu de $[AD]$ donc I est le milieu de $[EC]$

Or $\varphi(E) = C$ donc $I \in \Delta$

$\varphi(D) = F$ et J est le milieu de $[DF]$ alors $J \in \Delta$ ainsi $\Delta = (IJ)$

D'autre part

$\begin{cases} D \in (IJ) \\ \varphi(D) = F \end{cases}$ alors $\vec{u} = \overrightarrow{DF}$

5) $\varphi \circ \psi$ est un déplacement (la composée de deux antidéplacement)

$\begin{cases}\varphi_\circ\psi(B)=F\\ \varphi_\circ\psi(D)=C\end{cases}$ Alors l'angle de $\varphi\circ\psi$ est $\left(\widehat{\overrightarrow{BD},\overrightarrow{FC}}\right)\equiv\pi[2\pi]$ car $\begin{cases}\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AD}\\ \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\end{cases}$ donc $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{BC}$

Ainsi $\varphi\circ\psi$ est une symétrie centrale et comme $\varphi_\circ\psi(D)=C$

alors Ω le milieu de $[DC]$ est le centre de $\varphi_\circ\psi$

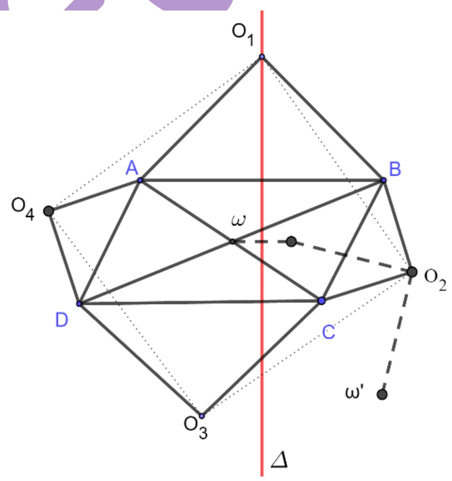
Correction9

1)a. On a $\begin{cases}O_1A=0_1B\\ \left(\widehat{\overrightarrow{O_1A},\overrightarrow{O_1B}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ donc $R_1(A)=B$ et $\begin{cases}O_2B=0_2C\\ \left(\widehat{\overrightarrow{O_2B},\overrightarrow{O_2C}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ donc $R_2(B)=C$

Ainsi $R_2\circ R_1(A)=C$ de même on prouve que $R_3\circ R_2(B)=C$et $R_4\circ R_3(C)=A$

b. $R_i\circ R_j$ et la composée de deux rotations d'angles $\frac{\pi}{2}$ et comme $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\equiv\pi[2\pi]$ donc $R_i\circ R_j$ est une symétrie centrale pour tout i et j de $\{1,2,3,4\}$

Or $R_2\circ R_1(A)=C$ et ω est le milieu de $[AC]$ donc $R_2\circ R_1=S_\omega$ de même on prouve que $R_3\circ R_2=S_\omega$ et $R_4\circ R_3=S_\omega$



2) a. $R_3\circ R_2(O_1)=R_2\circ R_1(O_1)=R_2(O_1)$ donc $R_3\big(R_2(O_1)\big)=R_2(O_1)$ alors $R_2(O_1)=O_3$

car O_3 est l'unique point invariant par R_3 ainsi $f(O_1)=R_3\circ R_2(O_1)=R_2(O_1)\ =O_3$

b.$R_4\circ R_3(O_2)=R_3\circ R_2(O_2)=R_3(O_1)$ donc $R_4\big(R_3(O_2)\big)=R_3(O_2)$ alors $R_3(O_2)=O_4$

car O_4 est l'unique point invariant par R_4 ainsi $f(O_2)=R_4\circ R_3(O_2)=R_3(O_2)\ =O_4$

c. D'une part $f(O_1)=O_3$ donc ω est le milieu de $[O_1O_3]$

D'autre part $f(O_2)=O_4$ donc ω est le milieu de $[O_2O_4]$ alors $O_1O_2O_3O_4$ est un parallélogramme

D'autre part $R_2(O_1)\ =O_3$ donc $\left(\widehat{\overrightarrow{O_2O_1},\overrightarrow{O_2O_3}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et par suite $O_1O_2O_3O_4$ est un rectangle

3) a. $g(A)=C$ et $g(O_1)=O_3$

b. supposons que $g=S_\Delta$ alors Δ est la médiatrice de $[AC]$ et $[O_1O_3]$ donc $(O_1O_3)//(AC)$ absurde

Ainsi g est une symétrie glissante.

c. Soit $g=t_{\vec{u}}\circ S_\Delta=S_\Delta\circ t_{\vec{u}}$

$g(A)=C$ et ω est le milieu de $[CA]$ donc $\omega\in\Delta$ et comme $\varphi(\omega)=\omega'$

alors $\vec{u}=\overrightarrow{\omega\omega'}$ et $\Delta=(\omega\omega')$

Correction10

1)a. On a $AC = AD$ et $AD \neq 0$ alors il existe un unique déplacement f tel que

$f(A) = D$ et $f(C) = A$

b. Soit θ une mesure de l'angle de f alors

$\theta \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DA}}\right) \equiv \pi + \left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

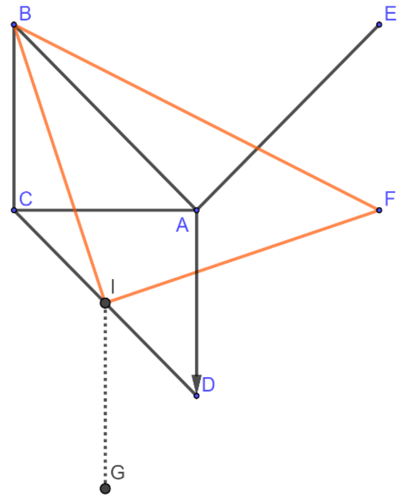
$\theta \neq 2k\pi, k \in$ Z alors f est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$

Soit ω le centre de f

On a $f \circ f$ est une rotation d'angle π donc $f \circ f = S_\omega$

et comme $f \circ f(C) = D$ alors ω est le milieu de $[CD]$

ainsi $\omega = I$ il en résulte f est la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre I



3) a. g est la composée de deux déplacements donc g est un déplacement d'angle

$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \equiv 0[2\pi]$Alors g est une translation et comme $g(A) = D$ donc $g = t_{\overrightarrow{AD}}$

b. $g(E) = F$ donc $f \circ r(E) = F$ or $r(E) = B$ alors $f(B) = E$

c. On a $\begin{cases} f(C) = A \\ f(B) = F \end{cases}$ donc $\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AF}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et comme $\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ alors $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires ainsi les points C,A et F sont alignés

3) D'une part le triangle ADC est rectangle en A et I est le milieu de $[DC]$ donc $CI = AI$

D'autre part $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{IG}$ donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{DG}$ ainsi $AI = DG$

Il en résulte $CI = DG$ et comme $CI \neq 0$ alors il existe un unique antidéplacement φ tel que $\varphi(C) = D$ et $\varphi(I) = G$

b. supposons que $\varphi = S_\Delta$ alors Δ est la médiatrice de $[CD]$ et $[IG]$ donc $(DC)//(IG)$ absurde

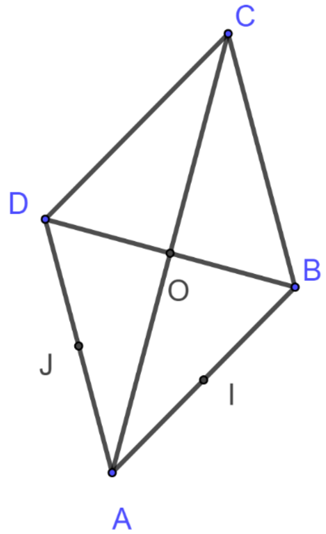
Ainsi φ est une symétrie glissante. Soit $\varphi = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ t_{\vec{u}}$

$\varphi(C) = D$ et I est le milieu de $[CD]$ donc $I \in \Delta$ et comme $\varphi(I) = G$ alors $\vec{u} = \overrightarrow{IG}$ et $\Delta = (IG)$

Correction11

1)a. On a $\begin{cases} AB = AD \\ \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ Donc ABD est un triangle équilatéral alors $AB = BD$ et comme $AB \neq 0$

Alors il existe un unique antidéplacement f tel que $f(A) = B$ et $f(B) = D$



b. $f \circ f(A) = D$ et $A \neq D$ donc f est une symétrie glissante.

Soit $f = t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta} = S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}}$

$\begin{cases} f \circ f = t_{2\vec{u}} \\ f \circ f(A) = D \end{cases}$ alors $2\vec{u} = \overrightarrow{AD}$ donc $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AJ}$

D'une part $f(A) = B$ et I est le milieu de $[AB]$ donc $I \in \Delta$

D'autre part $f(B) = D$ et O est le milieu de $[BD]$ donc $O \in \Delta$

Ainsi $\Delta = (OI)$

c. Soit D'l'image de D par f

On a ABD est un triangle équilatéral direct donc $f(ABD) = BDD'$ est un triangle équilatéral indirect

Ainsi $D' = C$ et par suite $f(ABD) = BDC$

2) a. On a $S(\{A, B, D\}) = \{B, C, D\}$ et $S(A) = C$ donc $S(\{B, D\}) = \{B, D\}$ ainsi $S([BD]) = [BD]$

b. $S(\{B, D\}) = \{B, D\}$ donc $\begin{cases} S(B) = B \\ S(D) = D \end{cases}$ ou $\begin{cases} S(B) = D \\ S(D) = B \end{cases}$ alors $S = S_{(BD)}$ ou $S = S_{(AC)}$

car deux antidéplacements qui coïncide suivant deux points distincts sont égaux

et comme $S(A) = C$ donc $S = S_{(BD)}$

3)a. On a $g(\{A, B, D\}) = \{B, C, D\}$ et $g(A) = D$ donc $g(\{B, D\}) = \{B, C\}$

Supposons que $g(D) = C$ alors $g(B) = B$ donc $g = S_{\Delta}$ absurde car $g \circ g(A) = C$ et $A \neq C$

Ainsi $g(D) = B$

b. On a $g \circ g(A) = B$ et $A \neq B$ donc g est une symétrie glissante. Soit $g = t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta} = S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}}$

$\begin{cases} g \circ g = t_{2\vec{u}} \\ g \circ g(A) = B \end{cases}$ alors $2\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ donc $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI}$

D'une part $f(A) = D$ et J est le milieu de $[AD]$ donc $J \in \Delta$

D'autre part $f(D) = B$ et O est le milieu de $[BD]$ donc $O \in \Delta$

Ainsi $\Delta = (OJ)$