M.BHIRI

Suite réelle 1

$4^{\text{ème}}$

Exercice 1 Questions indépendantes

1) Soit la suite (u) définie sur IN par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}\, u_n - 1 \end{cases}$

   Montrer que la suite u est minoré par -3.

   Déterminer graphiquement puis par le calcul le sens de variation et la limite de u.

2) Soit la suite (u) définie sur IN par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2\, u_n - 3 \end{cases}$

   Montrer à l'aide de deux manières que $u_n = 3 - 2^n$. pour tout entier naturel n .

3) Soit la suite (u) définie sur IN par $\begin{cases} u_0 > -1 \\ u_{n+1} = u_n\sqrt{1+u_n} \end{cases}$.

   a) Déterminer u_0 pour que la suite u soit constante .

   b) Soit $u_0 \in]-1\,,0[$.

      Montrer que $u_n \in]-1\,,0[\,;\ \forall n \in IN$ .Etudier la convergence de la suite u

   c) Soit $u_0 > 0$.

      Montrer que $u_n > 0\,;\ \forall n \in IN$ en déduire que la suite est croissante

      Montrons à l'aide de deux manières que la suite u est divergente

      $1^{\text{ère}}$ manière : montrons que u n'est pas majorée

      $2^{\text{ème}}$ manière : Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \sqrt{1+u_0}$

4) Montrer que la suite S définie sur IN* par : $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^4}$, n ≥1 est convergente vers une limite L

   dont on donnera un encadrement.(****)

5) Montrer que pour tout naturel n ≥ 1 ; on a : $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$

   En déduire la limite de la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

6) Soit la suite (u) définie sur IN par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{{u_n}^2+2u_n+2}{u_n+1} \end{cases}$

   a) Montrer que u est minorée par 0

   b) Etudier le sens de variation de u

   c) Montrer que $u_{n+1} - u_n > 1 .\ \forall n \in IN$. en déduire la limite de la suite u

   d) Soit v la suite définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$.

      Montrer que : $1 \leq v_n \leq \frac{5+2\,n}{3+2\,n}$, $\forall n \in IN$, puis conclure

7) Soit la suite (u) définie sur IN par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n\sqrt{u_n} \end{cases}$

   a) Montrer que : $u_n \geq n\ ;\ \forall n \in IN$

   b) Etudier le sens de variation de la suite u.

   c) Montrer que u n'est pas majorée .

8) Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}\, x)$

   a) Etudier f (parité et périodicité) en déduire qu'il suffit d'étudier f sur [0 , 2].

   b) Montrer que l'équation $\frac{1}{f(x)} = \frac{\pi}{2}\, x$ admet une unique solution dans] 0 , 1 [.

   c) Déterminer la limite de la suite S définie sur IN* par $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

9) Soit f la fonctic ... C_f.

On désigne par u la suite définie par $\begin{cases} u_0 > \frac{-1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{1+2u_n} \end{cases}$

a) Existe-t-il une valeur de u_0 pour la quelle la suite (u_n) est constante ?

b) Soit $u_0 = 1$. représenter sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite u.

c) Montrer que (u_{2n}) est minorée par $\frac{1}{2}$ et (u_{2n+1}) est majorée par $\frac{1}{2}$.

d) Etudier le sens de variation de chacune des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1})

e) Montrer alors que la suite (u_n) est convergente vers une limite que l'on précisera

Autrement : Montrer que la suite (v_n) définie par ($v_n = \frac{u_n - \frac{1}{2}}{u_n + 1}$) est géométrique .

10) Soit $(x_n)_{n\in N}$ une suite de réels positifs , décroissante et telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$

On pose pour tout n de IN, $u_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^n x_k$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$

Les suites v et w sont-elles adjacentes ?

Exercice 2

1) Etudier la fonction f définie sur IR par $f(x) = x - x^2$. tracer la parabole représentative

2) Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a) Placer sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de la suite u.

b) Etudier le sens de variation de u et Déduire quelle est convergente vers une limite que l'on calculera

3) Soit n un entier naturel non nul . Comparer $f(\frac{1}{n})$ et $\frac{1}{n+1}$

En déduire par récurrence que $0 \le u_n \le \frac{1}{n+1}$; $\forall n \in IN^*$ .Retrouver la limite de la suite u.

Exercice 3

Soit f une fonction définie , continue et strictement décroissante sur [0 , 1] telle que f([0 , 1]) = [0 , 1]

1) Déterminer f(0) , f(1) , fof(0) et fof (1).

2) a)Montrer que l'équation fof(x) = x admet une seule solution $\alpha \in]0,1[$.

b)Etablir le tableau de signe de h(x) = fof(x) – x , pour tout réel $x \in [0,1]$.

3) Soit la suite u définie sur IN par $u_0 \in [0,1]$ et pour tout entier n on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n , on a $u_n \in [0,1]$.

b) Dans le cas où $u_0 \in \{0,1\}$ la suite u est-elle convergente ?

4) On suppose que $u_0 \in]0, \alpha[$.

Pour tout entier naturel n ,on pose $x_n = u_{2n}$ et $y_n = u_{2n+1}$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n , on a $x_n \in]0, \alpha[$.

b) Etudier le sens de variation de la suite (x_n) .

c) En déduire que la suite(x_n) est convergente vers une limite que l'on précisera .

d) La suite u est-elle convergente ?

Exercice 4 Soit la suite u définie sur IN par : $u_0=3$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n}$

Soit $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$ où x > 0 et g = fof

1) a) Etudier le sens de variation de g sur$]0,+\infty[$

b) Etudier le signe de (g(x) – x) sur$]0,+\infty[$

2) Pour tout n de IN on pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$

a) Comparer v_n et 2

b) Etudier la monotonie de v ... rgente et calculer sa limite

3) Montrer que les suit...

Exercice 0

On considère les suites u , v et w vérifiant $v_n < u_n \leq w_n$. Compléter les phrases suivantes :

a)Si (u_n) diverge vers $-\infty$ alors ………

b)Si (v_n) converge vers 2 et $2v_n = w_n$; $\forall n \in IN$ alors ………

c)Si (v_n) et (w_n) sont adjacentes alors …….

d)Si (v_n) est croissante alors ……..

e)Si (w_n) est décroissante alors ……..

Exercice 1

Soit u la suite définie sur IN par $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{\sqrt{1+u_n^2}} - 1 \end{cases}$

Soit $\alpha \in]-1\,,0[$

A/Montrer que : $u_n \in]-1\,,0[$; $\forall n \in IN$

Etudier le sens de variation de la suite u.

En déduire que u est convergente vers une limite L que l'on précisera

B/ Soit q = $\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$ .Montrer que $0 < 1 + u_{n+1} < q\,(1 + u_n)$ puis retrouver la limite L.

Exercice 2

Soit u la suite définie sur IN par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$.

1) a)Etudier les variations de la fonction f définie sur] 0 , + ∞ [par f(x) = $\frac{x}{2} + \frac{1}{x}$

b)Etudier la position relative de C_f par rapport à la droite (y = x) sur $[\sqrt{2}\,, +\infty[$

2) a)En déduire que : $u_n \in [\sqrt{2}\,, 2]$; $\forall n \in IN$ et que la suite u est décroissante

b)Justifier que la suite est convergente et déterminer sa limite

Exercice 3

On considère les suites u , v et w définies sur IN* par : $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2}$; $v_n = \sum_{k=1}^{k=n} \sin(\frac{k}{n^2})$ *et* $w_n = \sum_{k=1}^{k=n} \cos(\frac{k}{n^2})$.

1) Montrer que la suite u est convergente vers ½ .
2) Montrer que : $\sum_{k=1}^{k=n} k^2 \leq n^3$ et $\sum_{k=1}^{k=n} k^3 \leq n^4$
3) Montrer que pour tout réel x∈ $[0\,, \frac{\pi}{2}]$, on a : $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ et $x - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1$
4) Calculer alors les limites des suites v , w *et* $(\frac{w_n}{n})$

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur IR par f(x) = $\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$.

1)a)Montrer que f est strictement croissante sur IR

b)Ecrire une équation de la tangente T à C_f au point O(0,0)

c)Etudier la position de C_f par rapport à T.

2) Soit u la suite définie sur IN par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

a) Montrer que $u_n \in]0\,,1]$; $\forall n \in IN$.

b) En déduire (de deux manières) que la suite u est convergente vers 0.

3) Soit v la suite définie sur IN par $\begin{cases} v_0 = \frac{\pi}{4} \\ u_n = \tan(v_n) \end{cases}$.

a)Montrer que la suite v est une suite géométrique

b) Exprimer alors en fonction de n

c) Retrouver alors la limite de u .

Exercice 5

Soit u la suite définie sur IN par $u_0 = 1$; $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n on a :

$u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$.

1) Montrer que $u_n \geq n, \forall n \in IN$. conclure la limite de u.
2) Montrer que $u_{n+1}{}^2 - u_n\, u_{n+2} = (-1)^{n+1}$
3) Soit la suite v définie sur IN par : $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$

a) Calculer la limite de la suite $(v_{n+1} - v_n)$.

b) Montrer que $v_{n+1} - v_{n-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{u_{n-1}\, u_{n+1}}$. Pour tout entier naturel non nul n.

c) En déduire que les suites extraites (v_{2n}) et (v_{2n+1}) sont adjacentes .

d) En déduire alors que la suite v est convergente.

Exercice 6

1) Démontrer que : $2^n \geq 1 + n$. $\forall n \in IN$
2) On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur IN* par : $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k\, 2^k}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n2^n}$.

a) Etudier le sens de variation de chacune des suites u et v.

b) Montrer que les suites u et v sont adjacentes .

Exercice 7

u et v deux suites de termes rationnels ,définies sur IN par :

$u_0 = 2$, $v_n = \frac{2}{u_n}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$

1) Montrer que $u_n \in [1,2]$, $v_n \in [1,2]$ et $u_n \geq v_n$ $\forall n \in IN$
2) Etudier le sens de variation de chacune des suites u et v. Conclure.
3) Montrer que $(u_{n+1} - v_{n+1}) \leq \frac{1}{4}(u_n - v_n)$
4) En déduire alors que les suites u et v sont adjacentes. Conclure Remarquons que les suites convergent vers un nombre irrationnel .

Exercice 8

u et v deux suites ,définies sur IN par : $u_0 = 1$, $v_0 = 2$, $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$

1)Montrer que $u_n > 0$, $v_n > 0$ $\forall n \in IN$

2)Etudier le sens de variation de chacune des suites u et v. Conclure.

3)Montrer que $(u_{n+1} - v_{n+1}) \leq \frac{1}{2}(u_n - v_n)$

En déduire alors que les suites u et v sont adjacentes.

4) Déduire que les suites u et v convergent ve[illegible]nnel .