Lycée pilote de Tunis	Suites réelles 1	Terminales maths
Mr Ben Regaya. A	+ Eléments de corrections	www.ben-regaya.net

Exercice1

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=3-\dfrac{4}{x+2}$.

On considère les suites u et v définies pour $n\in\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0=4 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$ et $v_n=\dfrac{u_n+1}{u_n-2}$.

On admettra que les suites u et v sont bien définies.

a) v est géométrique de raison 4.

b) $\displaystyle\sum_{k=5}^{13} v_k = v_5\times\frac{4^{10}-1}{3}$.

c) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\dfrac{2v_n+1}{v_n-1}$.

d) La suite u converge vers -1.

Exercice 2

Soit u la suite sur $\mathbb{N}$ par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=\dfrac{2}{3}u_n-\dfrac{n}{3^{n+1}}$ pour $n\in\mathbb{N}$.

1. a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $u_n=\dfrac{n+1}{3^n}$.

   b) Etudier les variations de la suite u.

   c) On déduire que la suite u est convergente.

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On pose $s_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}u_k$.

   a) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $s_n=\dfrac{9}{4}-\dfrac{2n+3}{4\times 3^{n-1}}$.

   b) Vérifier que $s_n=\dfrac{9}{4}-\dfrac{3}{2}u_n-\dfrac{1}{4\times 3^{n-1}}$.

   c) en déduire que la suite (s_n) est convergente.

   d) De l'égalité $u_n=s_{n+1}-s_n$ déduire les limites respectives des suites (u_n) et (s_n).

Exercice 3

Soit la suite t définie pour $n>0$ par : $t_n=\dfrac{n}{2^{n-1}}$.

1. Montrer que t est décroissante et minorée. Conclure.

2. Montrer que pour tout naturel $n>0$: $t_{n+1}=\dfrac{1}{2}t_n+\dfrac{1}{2^n}$. En déduire la limite de la suite t.

3. On définit sur $\mathbb{N}^*$ la suite u par : $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^{k-1}}=1+\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\dots+\frac{n}{2^{n-1}}$. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

   $u_n=4\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)-t_n$. En déduire la limite de la suite u.

Exercice 4

1. Soit x un réel positif, montrer que pour tout naturel n on a : $(1+x)^n\geq 1+nx$.

2. Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n=\dfrac{n!}{n^n}$.

   a) Montrer que $\dfrac{u_n}{u_{n+1}}=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

   b) Montrer que la suite u est convergente.

   c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_{n+1}\leq\dfrac{1}{2}u_n$ puis calculer la limite de u.

Exercice 5

On considère la suite u définie par : $u_n=\dfrac{n}{3^n}$, $n\geq 0$.

1. a) Montrer que pour tout naturel $n\geq 1$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leq\dfrac{2}{3}$.

   b) en déduire que pour tout naturel $n\geq 0$, $u_n\leq\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

2. On pose $s_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k$.

   a) Montrer que $s_n\leq 3$.

   b) En déduire que la suite (s_n) est convergente.

Exercice 6

Soit s la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $s_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. a) Montrer que pour tout $n\geq 1$; $s_n\geq\dfrac{n}{\sqrt{n}}$.

   b) La suite s est-elle convergente ?

2. Vérifier que pour tout entier $n\geq 1$, $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

3. On considère les suites u et v définies sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=2\sqrt{n}-s_n$ et $v_n=u_n+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

   a) Montrer que la suite u est croissante et que v est décroissante. Déduire qu'elles sont convergentes et qu'elles ont la même limite

   b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{s_n}{2\sqrt{n}}$.

4. On pose $l=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ .Déterminer un entier p tel que u_p soit une valeur approchée de l à 0, 1 près.

Exercice 7

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_1=2$ et pour tout naturel n non nul $u_{n+1}=2+\dfrac{n^2}{u_n}$.

1. a) Montrer que pour tout naturel $n\geq 2$; $n<u_n<n+1$, déduire la limite de la suite u.

   b) Montrer que la suite u est croissante.

2. Soit v la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_n=\dfrac{1}{-n+u_n}-1$.

a) Calculer v_1 et montrer que $v_{n+1} = \dfrac{1}{v_n + \dfrac{1}{n}}$.

b) Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $1 - \dfrac{1}{n} \leq v_n \leq 1$.

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - n)$.

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_n = \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} k v_k$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_n - \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} k(v_k - 1)$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $\left| s_n - \dfrac{n+1}{2n} \right| \leq \dfrac{1}{n}$.

c) Montrer alors que la suite (s_n) converge vers un réel que l'on déterminera.

Exercice 8

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} \dfrac{n}{n^2 + k}$.

1. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{2n}{n+1} \leq u_n \leq \dfrac{2n+2}{n}$.

b) En déduire la convergence de (u_n) et calculer sa limite.

2. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{2n} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$

b) Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} \leq 2\sqrt{n}$.

3. Soit $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $2n - 2\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n+1}\right) \leq s_n \leq 2n + 2\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}\right)$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $2n - 4\sqrt{n+1} \leq s_n \leq 2n + 4\sqrt{n}$ puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{s_n}{n}$.

Exercice 9

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 2 + \dfrac{4}{u_n - 1}$.

Partie I : On suppose $u_0 = 4$.

1. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 3$.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) en déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2. On pose $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ et $t_n = \dfrac{s_n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = +\infty$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $s_n \geq n u_n$.

c) Montrer que la suite (t_n) est décroissante. En déduire qu'elle converge.

Partie II : On suppose $u_0 = -4$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n < 0$.

2. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n < -2$.

b) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Exercice 10

Soit $n \geq 1$.

1. Montrer que l'équation $\sum\limits_{k=1}^{n} x^k = 1$ admet une unique solution t_n dans $[0,1]$.

2. On pose $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} x^k - 1$

a) Montrer que $f_n(t_{n-1}) = t_{n-1}^n$

b) Déduire que la suite (t_n) est décroissante.

c) Montrer que $f_n\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2^n}$. Déduire que la suite (t_n) est minorée par $\dfrac{1}{2}$.

3. Montrer que (t_n) converge vers $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 11

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(n+k)^k}$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2^{n+1}(n+1)^n \geq n+2$.

3. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{(2n+2)^{n+1}} + \sum\limits_{k=2}^{n} \left(\dfrac{1}{(n+k+1)^k} - \dfrac{1}{(n+k)^k} \right)$

En déduire que u est décroissante.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq \dfrac{1}{n}\left(1 - \left(\dfrac{1}{n+1}\right)^n\right)$. En déduire la convergence de la suite u vers un réel que l'on calculera.

Lycée pilote de Tunis	Suites réelles 2	Terminales maths
Mr Ben Regaya. A	+ Eléments de corrections	www.ben-regaya.net

Exercice1

Soit α un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{(1+\alpha)u_n - \alpha}{u_n} \end{cases}$$

1. a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq 1$.

   b) Montrer que (u_n) est une suite décroissante.

   c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et trouver sa limite.

2. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par: $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n - \alpha}$.

   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison α.

   b) Exprimer v_n en fonction de n et α.

   En déduire l'expression de u_n en fonction de n et α

   c) Retrouver alors la limite de la suite (u_n).

Exercice2

Soit $\alpha \in [0,1[$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+(1-\alpha^2)u_n^2}$.

Partie A- Dans cette partie $\alpha = 0$.

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n-1} \leq u_n \leq \sqrt{n}$. En déduire la limite de (u_n).

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2u_{n+1}} \leq v_n \leq \dfrac{1}{2u_n}$. En déduire la limite de (v_n).

4. Soit $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_n \geq \sqrt{n}$. En déduire la limite de (s_n).

   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}s_n \leq u_n \leq 1 + \dfrac{1}{2}s_n$. En déduire la limite de $\left(\dfrac{u_n}{s_n}\right)$.

Partie B- Dans cette partie $\alpha \in]0,1[$.

1. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n < \dfrac{1}{\alpha}$.

   b) Etudier la monotonie de (u_n). en déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{\alpha}\sqrt{1-(1-\alpha^2)^n}$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (u_k^2)$. Calculer la limite de (w_n) et de $\left(\dfrac{w_n}{n}\right)$.

Exercice 3

On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

1. On pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

   a) Calculer v_0 et w_0.

   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{2v_n + 1}{v_n + 1}$ et $w_{n+1} = \dfrac{2w_n + 1}{w_n + 1}$.

2. Dans cette question, on étudie la suite (v_n).

   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n \leq 2$.

   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les réels $v_{n+1} - v_n$ et $v_n - v_{n-1}$ ont même signe. En déduire que la suite (v_n) est croissante.

   c) Montrer que la suite (v_n) converge vers le réel $l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3. Etudier de manière analogue la suite (w_n) et montrer qu'elle converge aussi vers l.

Exercice 4

Pour n entier $n \geq 2$, on définie la fonction f_n sur $[1,+\infty[$ par : $f_n(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$.

1. Etudier les variations de f_n. En déduire le signe de $f_n\left(\dfrac{2n}{n+1}\right)$.

2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans l'intervalle $\left]\dfrac{2n}{n+1}, +\infty\right[$ une solution unique t_n.

3. Vérifier que $\dfrac{2n}{n+1} < t_n < 2$. En déduire la convergence de la suite (t_n) vers un réel que l'on précisera.

4. Montrer que pour x réel de $[1,2]$, $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$. En déduire que la suite (t_n) est croissante.

Exercice 5

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $(u_n + v_n)$ et $(u_n - v_n)$ convergent.

Montrer que (u_n) et (v_n) convergent.

Exercice 6

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On définit une suite (u_n) par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n}{u_n + u_{n+1}}$. Conclure sur la monotonie de (u_n).

b) Déterminer la limite de (u_n).

c) Déterminer la limite de $u_{n+1} - u_n$.

Exercice 7

Soit (u_n) une suite **croissante** de limite l. On pose $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

a) Montrer que (v_n) est croissante.

b) Etablir que $v_{2n} \geq \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

c) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$.

Exercice 8

Soient u et v les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n2^n}$.

1. Montrer que pour tout naturel n non nul : $v_n - u_n \geq 0$.
2. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $2^n \geq n+1$.

   b) Montrer que la suite u est croissante et que la suite v est décroissante
3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n$. En déduire que les deux suites u et v sont convergentes et ont la même limite.

Exercice 9

Soit u la suite définie par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{k}{3^k}$.

1. Montrer que pour tout $n \succ 0$, $u_{2n+2} - u_{2n} = \frac{1}{3^{2n+2}}(-4n-1)$. En déduire la monotonie de la suite (u_{2n}).
2. Montrer que la suite (u_{2n+1}) est croissante.
3. a) Montrer que pour tout naturel non nul n, $2^n \succ n$.

   b) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{2n} - u_{2n+1})$.
4. Montrer que la suite u converge vers un réel α tel que $u_3 \prec \alpha \prec u_2$.

Exercice 10

Soit x un réel tel que : $0 \prec x \prec \frac{\pi}{2}$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \cos x$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$u_n = u_{n-1}.\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$

1. Calculer u_n à l'aide de n, $\sin(2x)$ et $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^n}{x}\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 11

Soit u la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k}$.

1. Soit n un entier supérieur à 4.

   a) Montrer que : $u_n = 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{C_n^k}$.

   b) Soit k un entier tel que : $2 \leq k \leq n-2$.

   Montrer que $C_n^k \geq \frac{n(n-1)}{2}$. En déduire que : $\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{C_n^k} \leq \frac{2}{n}$.
2. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $2 + \frac{2}{n} \leq u_n \leq 2 + \frac{4}{n}$. En déduire que la suite u converge vers 2.

Exercice 12

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction φ_n sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $\varphi_n(x) = \tan x - x - n$.

1. Soit n un naturel fixé.

   a) Déterminer $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \varphi_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \varphi_n(x)$

   b) Etudier le sens de variation de la fonction φ_n.

   c) Démontrer que l'équation d'inconnue x, $\varphi_n(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On note t_n cette solution.

   d) Donner, suivant les valeurs de x, le signe de $\varphi_n(x)$.
2. L'unicité permet de définir la suite (t_n) pour tout naturel n.

   a) Justifier que cette suite est bornée.

   b) Calculer $\varphi_n(t_{n+1})$ pour $n \in \mathbb{N}$.

   c) En déduire que la suite (t_n) est strictement croissante. Conclure.

   d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \tan(t_n)$.

   e) Prouver que la suite (t_n) est convergente. Quelle est sa limite ?

Exercice 13

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1. Démontrer que l'équation $x^n + x^2 + x - 1 = 0$ admet une solution positive, que l'on notera u_n.
2. Montrer que, pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, on a : $0 \prec u_n \prec \alpha$, où α est la solution positive de l'équation: $x^2 + x - 1 = 0$.
3. Montrer que, pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, on a : $(u_n)^n + (u_n - \alpha)\left(u_n + \frac{1}{\alpha}\right) = 0$.
4. Montrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.
5. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 14

On suppose que (u_n) est une suite réelle croissante telle que (u_{3n}) converge.

Montrer que (u_n) converge.