Les suites réelles

1) Suites minorées -suites majorées

Activité1 : Soit (u_n) la suite définie sur N par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$

1) Calculer les trois premiers termes

2) Montrer que $\forall n \in$ N on a $0 \leq u_n \leq 2$

Solution

1) Pour $n = 0$ on a $u_1 = \sqrt{u_0 + 2} = \sqrt{2}$

Pour $n = 1$ on a $u_2 = \sqrt{u_1 + 2} = \sqrt{\sqrt{2} + 2}$

Pour $n = 2$ on a $u_3 = \sqrt{u_2 + 2} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2} + 2} + 2}$

2) Par récurrence

Pour $n = 0$ on a $u_0 = 0$ donc $0 \leq u_0 \leq 2$. (Ok)

Soit n un entier naturel donné tel que $0 \leq u_n \leq 2$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 2$

On a $0 \leq u_n \leq 2$ donc $2 \leq 2 + u_n \leq 4$ alors $\sqrt{2} \leq \sqrt{2 + u_n} \leq 2$ ainsi $\leq u_{n+1} \leq 2$

Conclusion : $\forall n \in$ N on a $0 \leq u_n \leq 2$

Remarque : On dit que (u_n) est minorée par 0 et majorée par 2 ou bien (u_n) est bornée

Activité 2

Soit (v_n) la suite définie surN*par $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ .Montrer que (v_n) est bornée

Solution

- On a $n + 1 \geq n \geq 0$ donc $\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n}$ alors $v_n \geq 0$
- On a $v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1},+\sqrt{n}}$ et comme $n \geq\perp$ donc $\sqrt{n} \geq 1$ et $\sqrt{n+1} \geq 1$ alors $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq 2$

  Et par suite $v_n \leq \frac{1}{2}$

Conclusion : $\forall n \in$ N* on a $0 \leq v_n \leq \frac{1}{2}$

2) Monotonie d'une suite

Définition : Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite réelle

- La suite $(u_n)_{n \in I}$ est croissante si et seulement si $\forall n \in I$ on a $u_n \leq u_{n+1}$
- La suite $(u_n)_{n \in I}$ est décroissante si et seulement si $\forall n \in I$ on a $u_n \geq u_{n+1}$

Activité 3 Soit (u_n) la suite définie sur N par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$. Montrer que (u_n) est croissante

Solution

Première méthode. (par récurrence)

Pour $n = 0$, $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{2}$ donc $0 \leq u_0 \leq u_1$

Soit n un entier naturel tel que $0 \leq u_n \leq u_{n+1}$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2}$

On a $0 \leq u_n \leq u_{n+1}$ donc $2 \leq 2 + u_n \leq 2 + u_{n+1}$ alors $0 \leq \sqrt{2 + u_n} \leq \sqrt{2 + u_{n+1}}$

Ainsi $u_{n+1} \leq u_{n+2}$

Conclusion : $\forall n \in$ N on a $u_n \leq u_{n+1}$ et par suite (u_n) est croissante

Deuxième méthode

D'âpres l'activité 1 on a $\forall n \in$ N on a $0 \leq u_n \leq 2$

$u_{n+1}^2 - u_n^2 = 2 + u_n - u_n^2 = (2 - u_n)(1 + u_n) \geq 0$ car $0 \leq u_n \leq 2$ alors $u_{n+1}^2 \geq u_n^2$

Et comme $u_n \geq 0$ et $u_{n+1} \geq 0$ alors $u_{n+1} \geq u_n$

Activité 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathrm{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{8(u_n-1)}{u_n+2} \end{cases}$

1) Montrer que $\forall n \in$ N on a $2 \leq u_n \leq 4$

2) Étudier la monotonie de (u_n)

Solution

1) pour $n = 0$, $u_0 = 3$ donc $2 \leq u_0 \leq 4$ (Ok)

Soit n un entier naturel donné tel que $2 \leq u_n \leq 4$ et montrons que $2 \leq u_{n+1} \leq 4$

D'une part on a : $u_{n+1} - 2 = \frac{8u_n-8-2U_n-4}{u_n+2} = \frac{6(u_n-2)}{u_n+2} \geq 0$ car $2 \leq u_n \leq 4$ alors $u_{n+1} \geq 2$

D'autre part on a : $4 - u_{n+1} = \frac{4u_n+8-8u_n+8}{u_n+2} = \frac{4(4-u_n)}{u_n+2} \geq 0$ car $2 \leq u_n \leq 4$ alors $u_{n+1} \leq 4$

Conclusion : $\forall n \in$ N on a $2 \leq u_n \leq 4$

2) $u_{n+1} - u_n = \frac{8(u_n-1)-u_n(u_n+2)}{u_n+2} == \frac{-u_n^2+6u_n-8}{u_n+2} = \frac{-(u_n-2)(u_n-4)}{u_n+2} \geq 0$ car $2 \leq u_n \leq 4$

Ainsi (u_n) est croissante

3) Suite arithmétique – Suite géométrique

	Suite arithmétique	Suite géométrique
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = qu_n$
Terme général	$u_n = u_0 + nr$ $u_n = u_m + (n-m)r$	$u_n = u_0 q^n$ $u_n = u_m q^{n-m}$
Somme	$(\text{nombre de termes})\dfrac{\text{Premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$	$\text{Premier terme}\dfrac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$ $, q \neq 1$

Activité 5: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2\,,\ u_n = \frac{4}{9} \\ u_{n+2} = \frac{1}{27}(12u_{n+1} - u_n) \end{cases}$

Et on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $v_n = u_n - \frac{1}{3^n}$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$

2) a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme

b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n

c) Calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_n + u_2 + \cdots + u_n$

Solution :

1) par récurrence

Pour $n = 0$ on a $\frac{1}{9}u_0 + \frac{2}{3^{0+2}} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9} = u_1$. (Ok)

Soit n un entier naturel donné tel que $u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$ et montrons que $u_{n+2} = \frac{1}{9}u_{n+1} + \frac{2}{3^{n+3}}$

On a $u_{n+2} = \frac{1}{27}(12u_{n+1} - u_n)$ or $u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$ donc $u_n = 9u_{n+1} - \frac{2}{3^n}$

Alors $u_{n+2} = \frac{1}{27}\left(12u_{n+1} - 9u_{n+1} + \frac{2}{3^n}\right) = \frac{1}{27}\left(3u_{n+1} - \frac{2}{3^n}\right) = \frac{1}{9}u_{n+1} + \frac{2}{3^{n+3}}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$

2) a) on $v_n = u_n - \frac{1}{3^n}$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}} - \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{9}u_n - \frac{1}{3^{n+2}} = \frac{1}{9}\left(u_n - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{9}v_n$$

alors (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{9}$ et de premier terme $v_0 = 1$

b) $v_n = v_0 q^n = \left(\frac{1}{9}\right)^n$ et $u_n = v_n + \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{9}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$

c) $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{9}\right)^k + \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{9}} + \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{9}{8}\left(1 - \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}\right) + \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$

3) Les sommes

Propriétés

- $\sum_{k=0}^{n}(u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k$
- $\sum_{k=0}^{n} \alpha u_k = \alpha \sum_{k=0}^{n} u_k$, $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\sum_{k=0}^{n} \alpha = (n+1)\alpha$ **la somme d'une constante = nombre de termes × cette constante**
- $\sum_{k=0}^{n} u_{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} u_k$
- $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots . + n = \frac{n(n+1)}{2}$. **La somme de Gauss**
- Soit $a \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ *alors* $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ **c'est la somme d'une suite géométrique**
- $\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k) = (\cancel{u_1} - u_0) + (\cancel{u_2} - \cancel{u_1}) + (\cancel{u_3} - \cancel{u_2}) + \cancel{\cdots} + (u_{n+1} - \cancel{u_n}) = u_{n+1} - u_0]$ (**télescopage**)

Activité 6 : Calculer les sommes suivantes

$S_1 = \sum_{k=0}^{n}(2+3^k).\ ,\ S_2 = \sum_{k=0}^{n} 2k + 3\left(\frac{1}{2}\right)^k,\ S_3 = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$

Solution :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n}(2) + \sum_{k=0}^{n}(3^k) = 2(n+1) + \frac{1-3^{n+1}}{1-3} = 2n+2-2+2\times 3^{n+1} = 2n + 2\times 3^{n+1}$$

$$S_2 = 2\sum_{k=0}^{n} k \ + 3\sum_{k=0}^{n}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) = 2\frac{n(n+1)}{2} + 3\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = n(n+1) - 6\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right),$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Autrement : $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1}$

4) Limite d'une suite

Théorème : Soit $a \in$ R

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty\,, si\ a > 1 \\ 1\,, si\ a = 1 \\ 0\,, \quad si\ a \in]-1,1[\\ pas\ de\ limite\ si\ a \leq -1 \end{cases}$$

Activité 7

Dans chacun des cas suivants calculer la limite de la suite (u_n)

1) $u_n = 1 + n^2 - n^3$ 2) $u_n = \frac{n+1}{n+2}$. 3) $u_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n$. 4) $u_n = \frac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$

5) $u_n = \sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$. 6). $u_n = 1,\underbrace{333\ldots3}_{n\ fois}, n \in$ N* 7) $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - n$

Solution :

1) $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

2) $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ on dit que (u_n) est convergente et qu'elle converge vers 1

3) $\frac{\pi}{2} > 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

4) $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)}{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n-1\right)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)}{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n-1\right)} = -1$ car $\frac{2}{3} \in]-1,1[$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

5) $u_n = \sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$ or $-\frac{1}{2} \in]-1,1[$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ d'où $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}$

6) $U_n = 1 + 0{,}3 + 0{,}03 + \cdots + 0,\underbrace{000\ldots.3}_{n\ fois} = 1 + 3(10^{-1} + 10^{-2} + \cdots + 10^{-n}) = 1 + 3\times 10^{-1}\frac{1-10^{-n}}{1-10^{-1}}$

$= 1 + \frac{3}{10}\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{\frac{9}{10}} == 1 + \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right)$ or $\frac{1}{10} \in]-1{,}1[$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{4}{3}$

7) $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{1}{2}$

Définition :

1) Une suite qui tend vers une limite finie l est dite convergente

2) Une suite (u_n) qui n'est pas convergente est dite divergente

(u_n) est divergente donc $\left(\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty\right.$ ou $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou (u_n) n'admet pas de limite)

3) on dit que (u_n) a une limite lorsque (u_n) est convergente ou $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Théorème

Si une suite (u_n) admet une limite alors cette limite est unique

C'est-à-dire si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = l$, $\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = l$, $\lim_{n\to+\infty} u_{3n} = l$, $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$ ....

Activité 8

Étudier la convergence de la suite $u_n = 3 + (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$

D'une part $u_{2n} = 3 + (-1)^{2n} = 4$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = 4$

D'autre part $u_{2n+1} = 3 + (-1)^{2n+1} = 2$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 2$

$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} \neq \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1}$ alors (u_n) n'admet pas de limite

Théorème :

Soit (u_n) une suite réelle et a fini ou infini

$\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = a$, $\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = a$

Activité 9 : Etudier la convergence de (u_n) dans chacun des cas suivants

1) $u_n = \frac{1}{n+(-1)^n}$, $n \geq 2$. 2) $U_n = \frac{(-1)^n n}{n+2}$.

Solution :

1) . On a

$$\begin{cases} u_{2n} = \frac{1}{2n+1} \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} u_{2n} = 0 \\ u_{2n+1} = \frac{1}{2n} \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0 \end{cases}.$$ Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

2) on

$$\begin{cases} u_{2n} = \frac{2n}{2n+2} \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} u_{2n} = 1 \\ u_{2n+1} = \frac{-2n-1}{2n+3} \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = -1 \end{cases}.$$ Alors (u_n) n'admet pas de limite

5) Limites et ordre

Théorème : Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites

1) $\begin{cases}(u_n)\ converge\ vers\ l\\(v_n)\ converge\ vers\ l'\\ u_n \le v_n\end{cases}$ alors $l \le l'$. (Passage a la limite)

2) $\begin{cases}w_n \le u_n \le v_n\\ \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l\\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l\end{cases}\ alors\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

3) $\begin{cases}u_n \ge v_n\\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty\end{cases}$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

4) $\begin{cases}u_n \le v_n\\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty\end{cases}$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Activité 10

Etudier la convergence de (u_n) dans chacun des cas suivants

1) $u_n = \frac{n\cos(n)}{n^2+1}$. 2) $u_n = (1+n)^n$. 3) $u_n = n!$ 4) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k}$

Solution :

1) On a $-1 \le \cos(n) \le 1$ et $\frac{n}{n^2+1} \ge 0$ alors $-\frac{n}{n^2+1} \le u_n \le \frac{n}{n^2+1}$ et comme $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{n}{n^2+1} = 0\\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0\end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

2) $\forall n \ge 1$ on a $1+n \ge 2$ donc . . $u_n \ge 2^n$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

3) On a $n! \ge n$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{n} = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

4) On a $1 \le k \le n$ donc $n^2 + 1 \le n^2 + \mathrm{k} \le n^2 + n$ alors $\frac{1}{n^2+n} \le \frac{1}{n^2+k} \le \frac{1}{n^2+1}$

Ainsi $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+n} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+n} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+1}$ d'où. $\frac{n}{n^2+n} \le u_n \le \frac{n}{n^2+1}$

Et comme $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1\\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1\end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

6) Convergence des suites monotones

Théorème

1) Si $(u_n)_{n\in I}$ est une suite croissante et majorée, alors elle converge vers un réel l et $\forall n \in I$ on a $u_n \le l$

2) Si $(u_n)_{n\in I}$ est une suite décroissante et minorée, alors elle converge vers un réel l et $\forall n \in I$ on a $u_n \ge l$

3) Si $(u_n)_{n\in I}$ est une suite croissante et non majorée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

4) Si $(u_n)_{n\in I}$ est une suite décroissante et non minorée, alors elle $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Activité 11

Soit $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}*$ définie par $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

1) Étudier la monotonie de (u_n)

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$

3) Montrer que (u_n) est non majorée

4) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Solution

1) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} \geq 0$ donc (u_n) et croissante

2) $u_{2n} - u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

On a : $n+1 \leq k \leq 2n$ donc $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$ alors $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$

Ainsi $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$

3) Supposons que (u_n) est majorée donc elle est convergente car elle est croissante ; Soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l, l \in \mathbb{R}$

On a $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$ alors par passage a la limite on obtient $l - l \geq \frac{1}{2}$ donc $0 \geq \frac{1}{2}$ absurde

Alors (u_n) est non majorée

4) (u_n) est croissante et non majorée donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Remarque :

$u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$ donc pour $n = 2^k$ on obtient $u_{2^{k+1}} - u_{2^k} \geq \frac{1}{2}$ alors $\sum_{k=0}^{n-1} u_{2^{k+1}} - u_{2^k} \geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}$

Alors $u_{2^n} - u_1 \geq \frac{n}{2}$ ainsi $u_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{n}{2}\right) = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2^n} = +\infty$

Et par suite (u_n) n'est pas majorée

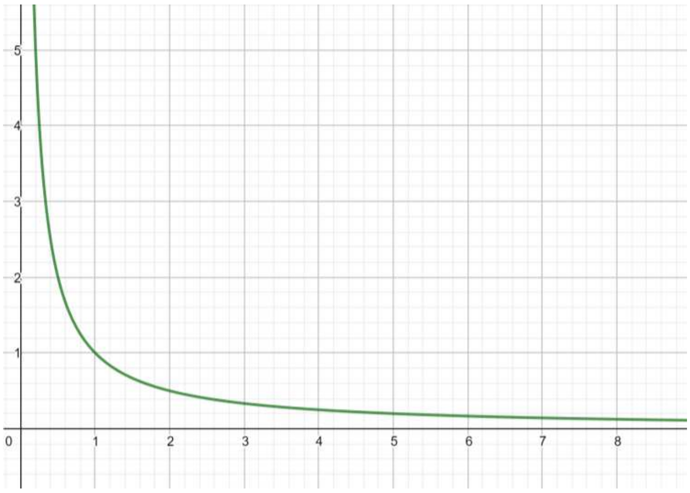
7) Image d'une suite par une fonction continue

Théorème

$\begin{cases} v_n = f(u_n). \\ u_n \in I, \forall n \in \mathbb{N}. \\ (u_n)\ converge\ vers\ l \in I \\ f\ est\ continue\ sur\ I. \end{cases}$ Alors (v_n) converge vers $f(l)$

Activité 12

Sur la figure ci-dessous est tracer la courbe d'une fonction f continue sur $]0, +\infty[$



1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution α_n sur $]0, +\infty[$

2) Montrer que (α_n) est croissante

3) Montrer que (α_n) n'est pas majorée. Conclure

Solution

1) $\begin{cases} f(]0,+\infty[) =]0,+\infty[. \\ \frac{1}{n} \in]0,+\infty[\ \forall n \in \mathbb{N}^{\times}. \\ f \ est \ strictement \ decroissante \ sur \ ]0,+\infty[\end{cases}$

Alors l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution dans $]0, +\infty[$

2) On a $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ donc $f(\alpha_{n+1}) \leq f(\alpha_n)$ et comme f est décroissante alors $\alpha_{n+1} \geq \alpha_n$ ainsi (α_n) est croissante

3) Supposons que (α_n) est majorée donc elle est convergente car elle est croissante ; Soit $l = \lim_{n-+\infty} \alpha_n$, $l \in \mathbb{R}$

On a $\begin{cases} \alpha_n \in [0,+\infty[\ , \forall n \in \mathbb{N}^* \\ (\alpha_n) \ converge \ vers \ l \in [0,+\infty[\\ f \ est \ continue \ sur \ [0,+\infty[\end{cases}$ alors $\big(f(\alpha_n)\big)$ converge vers $f(l)$

$f(\alpha_n) = \frac{1}{n}$ alors par passage a la limite on obtient $f(l) = 0$

Absurde car l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solutions ainsi (α_n) n'est pas majorée et comme (α_n)

Est croissante donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Théorème :

$\begin{cases} v_n = f(u_n). \\ f \ est \ definie \ \ sur \ I. \\ u_n \in I, \forall n \in \mathbb{N}. \\ \lim_{n\to+\infty} u_n = a. \\ \lim_{x\to a} f(x) = b. \end{cases}$ Alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = b$

Activité 13

Étudier la convergence de (u_n) dans chacun des cas suivants

1) $u_n = n\left(1 - cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right), n \in \mathbb{N}^*$. 2) $u_n = tan\left(\frac{\pi}{2}\frac{n}{n+1}\right)$

Solution :

1) $u_n = \frac{1-\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2} = f(v_n)$ avec $\begin{cases} v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \\ f : x \mapsto \frac{1-\cos(x)}{x^2} \end{cases}$

On a $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2} \end{cases}$ Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$

2) $u_n = f(v_n)$ avec $\begin{cases} v_n = \frac{\pi}{2}\frac{n}{n+1} \\ f : x \mapsto \tan(x) \end{cases}$

On a $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{\pi}{2} \\ \frac{n}{n+1} < 1 \; donc \; \frac{\pi}{2}\frac{n}{n+1} < \frac{\pi}{2} \\ \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = +\infty \end{cases}$ Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

8) Suite récurrente

Théorème

$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_n \in I, \forall n \in \mathbb{N} \\ (u_n) \; converge \; vers \; l \in I \\ f \; est \; continue \; sur \; I \end{cases}$ Alors $f(l) = l$

Remarque

1) Par fois l'équation $f(x) = x$ admet plusieurs solutions. Dans ce cas On prend la solution qui est dans I

2) S'il y a plusieurs solution dans I . Utiliser la monotonie de (u_n)

Activité 14

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq u_n \leq 1$

2) Montrer que (u_n) est croissante

3) Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite

4) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq 1 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(1 - u_n)$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq 1 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) Retrouver la limite de (u_n)

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $1 - \frac{1}{n}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \leq S_n \leq 1$

b) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

Solution :

1) Par récurrence

Pour $n = 0$, $U_0 = 0$ alors $0 \leq u_0 \leq 1$. (Ok)

Soit n un entier naturel donné tel que $0 \leq u_n \leq 1$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

On a $0 \leq u_n \leq 1$ alors $1 \leq 1 + u_n \leq 2$ donc $\frac{1}{2} \leq \frac{1+u_n}{2} \leq 1$ ainsi $0 \leq \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \leq 1$

Et par suite $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq u_n \leq 1$

2) $u_{n+1}^2 - u_n^2 = \frac{1+u_n}{2} - u_n^2 = \frac{1+u_n-2u_n^2}{2} = (1-u_n)\left(\frac{1}{2} + u_n\right) \geq 0$ car $0 \leq u_n \leq 1$ donc $u_{n+1}^2 \geq u_n^2$

Et comme $u_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ alors $u_{n+1} \geq u_n$ ainsi (u_n) est croissante

3) (u_n) est croissante et majorée par 1 donc elle est convergente. Soit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$, $l \in \mathbb{R}$

Soit $f : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{2}}$, f est continue sur $[-1, +\infty[$

$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_n \in I = [0,1], \forall n \in \mathbb{N} \\ (u_n)\ converge\ vers\ l \in I \\ f\ est\ continue\ sur\ I \end{cases}$ Alors $f(l) = l \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1+l}{2}} = l \Leftrightarrow \frac{1+l}{2} = l^2 \Leftrightarrow 2l^2 - l - 1 = 0 \Leftrightarrow l = 1\ ou\ l = -\frac{1}{2}$

Et comme $l \in [0,1]$ donc $l = 1$

4)a) D'une part $0 \leq u_{n+1} \leq 1$ donc $1 - u_{n+1} \geq 0$

b) d'autre part $1 - u_{n+1} = 1 - \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} = \frac{1 - \frac{1+u_n}{2}}{1 + \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}} = \frac{1}{2}(1-u_n) \times \frac{1}{1+\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}} \leq \frac{1}{2}(1-u_n)$

Car $1 + \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \geq 1$ donc $\frac{1}{1+\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}} \leq 1$

b) Par récurrence

Pour $n = 0$; $1 - u_0 = 1$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ donc $0 \leq 1 - u_0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0$. (Ok)

Soit n un entier naturel donné tel que $0 \leq 1 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et montrons que $0 \leq 1 - u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

On a $1 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc $\frac{1}{2}(1-u_n) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ et comme $0 \leq 1 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(1-u_n)$

Alors $0 \leq 1 - u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $0 \le 1 - u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) on a $\begin{cases} |1-u_n| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n. \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0. car\ \frac{1}{2} \in]-1,1[\end{cases}$ Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

5)a) On a $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k \le u_k \le 1$ alors $\sum_{k=1}^n 1 - \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k \le \sum_{k=1}^n u_k \le \sum_{k=1}^n 1$

Donc $n - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \le \sum_{k=1}^n u_k \le n$ ainsi $1 - \frac{1}{n}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \le S_n \le 1$

b) on a $\begin{cases} 1 - \frac{1}{n}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \le S_n \le 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1 \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$