Exercice n°1:

Soit (U_n) la suite définie sur IN par : $U_0 = 1$ et pour tout $n \in IN$ $U_{n+1} = \left(\frac{n+2}{2n+2}\right)U_n$.

1- Montrer que pour tout $n \in IN$: $0 < U_n \leq 1$.

2- Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

3- En déduire qu'elle est convergente puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.

4- Soit (V_n) la suite définie sur IN par : $V_n = \frac{U_n}{n+1}$.

a- Montrer que la suite (V_n) est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b- Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

c- En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n}$.

Exercice n°2:

Soit U la suite définie sur IN par : $U_0 = 0$ et pour tout $n \in IN$: $U_{n+1} = \frac{U_n + 1}{\sqrt{U_n^2 + 3}}$

1- Montrer que pour tout $n \in IN$: $0 \leq U_n < 1$

2-a- Montrer que pour tout $n \in IN$: $U_{n+1} > \frac{1+U_n}{2}$

b- En déduire que la suite U est croissante et qu'elle est convergente.

3- Montrer que pour tout $n \in IN$: $0 < 1 - U_{n+1} < \frac{1}{2}(1 - U_n)$ et calculer alors la limite de U_n en $+\infty$.

4- On pose pour tout $n \in IN$: $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} U_k$

Montrer que pour tout $n \in IN$: $n - 1 \leq S_n \leq n + 1$ et en déduire la limite $\frac{Sn}{n}$ en $+\infty$

Exercice n°3:

Soit (U_n) la suite définie sur IN^* par : $U_n = \frac{n}{2^{n-1}}$.

1-a- Montrer que pour tout $n \in IN^*$: $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$ et en déduire que la suite (U_n) est décroissante.

b- Prouver alors que la suite (U_n) est convergente .

2- Montrer que pour tout $n \in IN^*$: $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{1}{2^n}$ et en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n = 0$.

3- Soit pour tout $n \in IN^*$: $S_n = 1 + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \cdots\cdots\cdots + \frac{n}{2^{n-1}}$

Montrer que pour tout $n \in IN^*$: $S_n = -U_n + 4\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ et en déduire la limite de S_n.

Exercice n°4:

Soit $(U_n)_{n\in IN}$ la suite réelle définie par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \frac{2}{\sqrt{4 - U_n^2}}$ pour tout $n \in IN$

1-a- Montrer que, pour tout $n \in IN$, on a : $0 \leq U_n < \sqrt{2}$.

b- Montrer que la suite (U_n) est croissante et qu'elle est convergente vers une limite qu'on préciser

$(V_n)_{n\in IN}$ la suite définie par : $V_n = \frac{[illegible]}{2-U_n^2}$ et pour tout $n \in IN^*$; on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{[illegible]}{n+\sqrt{V_k}}$.

a- Montrer que $(V_n)_{n\in IN}$ est une suite arithmétique de raison 2 et en déduire U_n en fonction de n.

b- Soit $n \in IN^*$, montrer que pour tout $k \in \{1,\ldots\ldots,n\}$; on a : $\frac{1}{n+\sqrt{V_n}} \leq \frac{1}{n+\sqrt{V_k}} \leq \frac{1}{n+\sqrt{V_1}}$

c- En déduire que (S_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice n°5 :

Soit la suite $(U_n)_{n\in IN^*}$ définie par $U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^3+k}$

1) Calculer U_1 et U_2.

2) Démontrer que $\forall\, n \in IN^*$ on a : $\frac{n+1}{n^2+1} \leq U_n \leq \frac{1+n}{n^2}$

3) Démontrer que la suite U converge vers 0.

Exercice n°6:

Soit (U_n) la suite définie sur IN par : $U_n = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}$

1-a- Montrer que la suite (U_n) est croissante.

b- Montrer que pour tout $n \in IN$: $U_{2n} - U_n \geq \frac{n}{4n+1}$.

c- Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

2- Soit (V_n) la suite définie sur IN par : $V_n = \frac{U_n}{n^2}$.

a- Montrer que pour tout $n \in IN$: $\frac{n+1}{2n+1} \leq U_n \leq n+1$.

b- En déduire que la suite (V_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice n°7 :

Soit $n \in IN$ et f_n l'application définie sur IR par : $f_n(x) = x^3+3(n+1)x+1$

1) a) Dresser le tableau de variation de f_n.

b) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans IR une solution unique notée α_n et que $\alpha_n \in]-1,0[$.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]-1,0[$ et pour tout $n \in IN$ on a $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

b) En déduire que la suite (α_n) est strictement croissante et qu'elle est convergente.

c) Montrer que pour tout $n \in IN$, on a $\alpha_n = \frac{-1}{\alpha_n^2+3(n+1)}$ puis calculer $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$.