Lycée Pilote Tunis	Mr. Masmoudi. R.	4° maths
Série d'exercices (Suites réelles)		

Exercice 1 :

Soient u et v deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{2n+1}{3^n}$ et $v_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{3}u_n$.

1) Montrer que u est décroissante. En déduire que u converge vers un réel α.
2) Exprimer v_n en fonction de n. Déterminer la valeur de α.
3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} v_k$ et $S'_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.
   a) Exprimer S_n en fonction de n.
   b) Montrer que $S'_n = 2 - \dfrac{1}{2\times 3^{n-1}} - \dfrac{1}{2}u_n$. En déduire la limite de S'_n.
4) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ on pose $t_n = (2n+1)(tnax)^{2n}$.
   a) Montrer que si $x \in \left]0\,;\dfrac{\pi}{6}\right]$, on a : $0 \leqslant t_n \leqslant u_n$. En déduire dans ce cas la limite de t.
   b) Montrer que si $x \in \left]\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ la suite t est divergente.
   c) Pour $x = \dfrac{\pi}{4}$ on pose $w_n = \dfrac{1}{n^2+1}\sum\limits_{k=0}^{n} t_k$. Déterminer la limite de w.

Exercice 2 :

Pour chaque question, il y a une ou plusieurs propositions correctes. Indiquer la ou les propositions vraies. (Justifier).

1) Les suites suivantes sont convergentes :
   a) $\dfrac{3n+(-1)^n\sqrt{n}}{n+5}$ b) $n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ c) $n^2\sin\left(\dfrac{2n-1}{3n+5}\right)$ d) $\dfrac{1}{n}\cos(n)$
2) On considère les suites U, V et W définies sur $\mathbb{N}$ et vérifiant les propriétés suivantes : $U_n \leqslant V_n \leqslant W_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 1$. Alors :
   a) $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$.
   b) V est minorée.
   c) Pour tout n, $-1 \leqslant V_n \leqslant 1$.
   d) On ne sait pas dire si la suite V a une limite ou non.
3) Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = \dfrac{3}{2}$ et pour tout n, $U_{n+1} = 2U_n - 1$. On alors :
   a) La suite U converge vers 1, abscisse du point d'intersection des droites d'équations $y = x$ et $y = 2x - 1$.
   b) La suite V définie par $V_n = U_n - 1$ est géométriques.
   c) La suite V est majorée.
   d) $U_0 + U_1 + \ldots\ldots + U_n = 2^n + n + \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3 :

Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n+k}}$.

1) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{\sqrt{2n+2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} > \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}}$. En déduire que u est monotone.
2) Montrer que $u_n \geqslant \sqrt{\dfrac{n}{2}}$. En déduire la limite de u.

3) Soit $v_n = \dfrac{u_n}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{2n}} \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$. En déduire la limite v.

Exercice 4 :

Soit u la suite définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2 + \dfrac{1}{{u_n}^2}$. On pose $v_n = 2 + \dfrac{1}{{u_n}^2}$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2) Déterminer le sens de variation de v. En déduire que v est convergente.
3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1 + 2n$. En déduire la limite de u et celle de v.
4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2 \leqslant v_n \leqslant 2 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.
5) Soit $S_n = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} v_k$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la limite de S.

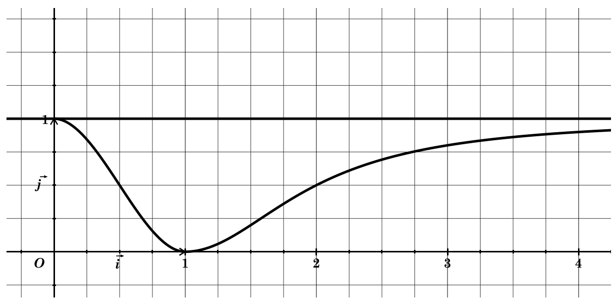
Exercice 5 :

Soit u la suite définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n < 3$.
2) Montrer que u est croissante. En déduire que u converge et déterminer sa limite.
3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < 3 - u_{n+1} \leqslant \dfrac{2}{5}(3 - u_n)$. En déduire que $0 < 3 - u_n \leqslant 3\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.
4) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = n(3 - u_n)$. Montrer que $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant \dfrac{4}{5}$. En déduire la limite de v.
5) On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} k u_k$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $0 \leqslant \dfrac{3n(n+1)}{2} - S_n \leqslant 5\left[1 - \left(\dfrac{4}{5}\right)^n\right]$. En déduire la limite de la suite S.

Exercice 6 :

La figure ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$. La droite $\Delta : y = 1$ est une asymptote à $\mathscr{C}_f$.



1) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet exactement deux solutions $x_n \in [0\,;1]$ et $y_n \in]1\,;+\infty[$.
2) Etudier la monotonie des suites (x_n) et (y_n)
3) Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes et préciser leur limite.

Exercice 7 :

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

1) Etudier les variations de f et tracer sa courbes $\mathscr{C}$ (unité 3 cm).
2) Montrer que pour tout $x \in [0\,;2]$, on a $f(x) \in [0\,;2]$.
3) On considère les suites U et V définies par : $U_0 = 1$, $V_0 = 2$ et pour tout entier n on a : $U_{n+1} = f(U_n)$ et $V_{n+1} = f(V_n)$.
   a) Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de U et ceux de V.
   b) Que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites U et V.
   c) Montrer que tous les termes des suites U et V appartiennent à $[0\,;2]$.
   d) Etudier le sens de variation de U et V. En déduire qu'elles convergent.
   e) Montrer que $V_{n+1} - U_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{4}(V_n - U_n)$. En déduire que pour tout n, $V_n - U_n \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.
   f) Montrer que sont adjacentes puis déterminer leur limite.

Exercice 8 :

1) Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,\frac{1}{2}]$ par $f(x) = x - x^2$.

   a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}$, on a : $f(\frac{1}{n+1}) \leqslant \frac{1}{n+2}$.

   b) Montrer que f est croissante sur $[0\,;\,\frac{1}{2}]$.

2) Soit U la suite définie par : $U_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout n, $U_{n+1} = U_n - U_n^2$.

   a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n \leqslant \frac{1}{2}$.

   b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}$, on a : $U_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.

   c) En déduire la limite de la suite U.

3) Soit la suite V définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = nU_n$.

   a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}$, on a : $1 \leqslant \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n} \leqslant 1 + \frac{1}{n}$.

   b) En déduire que pour $n \geqslant 2$, on a : $n \leqslant \frac{1}{U_n} - 3 \leqslant n + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n-1}$.

   c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}$, on a : $\frac{1}{2n} \leqslant \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^{\times}$ on a :

   $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} \leqslant 2\sqrt{n}$.

   d) Etablir pour $n \geqslant 2$, on a : $n \leqslant \frac{1}{U_n} - 3 \leqslant n + 2\sqrt{n-1}$. En déduire la limite de V.

Exercice 9 :

Soit les suites U et V définies par : $U_0 = 1$ et $V_0 = 2$ et pour tout entier n on a :

$$U_{n+1} = \frac{2U_nV_n}{U_n + V_n} \quad \text{et} \quad V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}.$$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n < V_n$.
2) Montrer que U est croissante et que V est décroissante.
3) En déduire que U et V sont adjacentes.
4) Montrer que la suite $(U_nV_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
5) En déduire la valeur de l .

Exercice 10 :

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^{\times}$ on a : $n\,! \geqslant 2^{n-1}$.

2) On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}^{\times}$ par : $U_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots\ldots + \frac{1}{n!}$.

   a) Montrer que U est majorée par 3.
   b) En déduire qu'elle converge.

3) Soit $V_n = U_n + \frac{1}{n(n!)}$, $n \in \mathbb{N}^{\times}$.

   a) Montrer que V est décroissante.
   b) Montrer que $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^{\times 2}$ on a : $U_p \leqslant V_q$.
   c) Montrer que U *et* V sont adjacentes.

Exercice 11 :

On considère les suites u et v définies par : $u_0 = 3$, $v_n = \frac{7}{u_n}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.

1) Calculer v_0 et v_1.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

3) Montrer que $u_{n+1}-v_{n+1}=\dfrac{1}{4u_{n+1}}\left(u_n-v_n\right)^2$.

4) Etudier la monotonie de u et v.

5) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n \geqslant \dfrac{21}{8}$. En déduire que $u_{n+1}-v_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{10}\left(u_n-v_n\right)^2$.

6) Prouver que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n-v_n \leqslant \dfrac{1}{10^{2^n-1}}$.

7) Montrer que u et v sont adjacentes et déterminer leur limite.

Exercice 12 :

Soit u la suite définie par : $u_0\in\mathbb{R}$ et $u_{n+1}=2+u_n-\sqrt{3+\left(u_n\right)^2}$.

I) Déterminer u_0 pour que u soit constante.

II) Dans cette partie $u_0\in]0\,;1[$.

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0<u_n<1$.

2) Etudier la monotonie de u. En déduire que u converge et préciser sa limite.

3) Montrer que pour $n\in\mathbb{N}$, $0<1-u_{n+1} \leqslant \left(\sqrt{3}-1\right)\left(1-u_n\right)$. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0<1-u_n \leqslant \left(\sqrt{3}-1\right)^n\left(1-u_0\right)$ et retrouver la limite de u.

4) Soit $w_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{u_k}$; $n\in\mathbb{N}$. Montrer que w est divergente.

5) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{3+\left(u_k\right)^2}$ et $t_n=u_n+S_n$.

a) Montrer que la suite t est arithmétique.

b) Déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{S_n}{n+1}\right)$.

III) Dans cette partie $u_0<-1$.

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n<-1$.

2) En déduire que u est décroissante.

3) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n \leqslant 2-\sqrt{3+\left(u_0\right)^2}$.

4) Déterminer la limite de u.

Exercice 13 :

Les questions sont indépendantes.

1) Soit $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$; $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $u_{2n}-u_n \geqslant \dfrac{1}{2}$. En déduire la limite de u.

2) Soit $v_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$; $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $\left(v_{2n}\right)$ et $\left(v_{2n+1}\right)$ sont adjacentes. Conclure.

3) Soit $w_n=\dfrac{\sum_{k=1}^{n}k!}{n!}$; $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer la limite de w.