CHABCHOUB Taïeb
D: 74 292 291 - B: 74 402 788
P: 98 251 593 - 20 251 593

Ex 1) Soit la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x) - x^n$ pour tout $n \in IN^*$

1°) Montrer qu'il existe un unique réel $a_n \in]0,1[$ tel que $f_n(a_n) = 0$

2°) Etablir que pour tout $x \in]0,1[$ et que pour tout $n \in IN^*$, pour tout $p \in IN^*$ $(n > p \Rightarrow f_n(x) > f_p(x))$

3°) Montrer que la suite $(a_n)_{n \in IN^*}$ est croissante et convergente.

Ex 2) 1) Démontrer que pour tout $n \in IN^*$ on a $n! \geq 2^{n-1}$

2°) Soit la suite $(U_n)_{n \in IN^*}$ définie par : $U_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ pour tout $n \in IN^*$

a) Montrer que la suite (U_n) est majorée par 3

b) En déduire que (U_n) est convergente. Soit $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

3°) Soit la suite $(V_n)_{n \in IN^*}$ définie par $V_n = U_n + \frac{1}{n.(n!)}$ $\forall n \in IN^*$
Démontrer que $(V_n)_{n \in IN^*}$ est décroissante.

4°) a) Montrer que (V_n) et (U_n) sont adjacentes

b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$

Ex 3) Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$ pour tout $x \in IR^*_+$

1°) Montrer que $\forall x \in]1,+\infty[$ on a $1 < f(x) < x$

2°) Soit la suite $(U_n)_{n \in IN}$ telle que $\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{1}{U_n}\right) \forall n \in IN \end{cases}$

a) Montrer que $\forall n \in IN$ $U_n \geq 1$

b) Etudier la monotonie de la suite (U_n)

c) En déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

3°) Montrer que pour tout $n \in IN$ on a $|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{4}|U_n - 1|$. Retrouver alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

4°) Soit la suite $(V_n)_{n \in IN}$ définie par $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 1}$ pour tout $n \in IN$

a) Trouver une relation entre V_{n+1} et V_n pour tout n

b) Montrer que $\forall n \in IN^*$ on a $V_n = (V_0)^{2^n}$

5°) Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN^*$ on a $2^n \geq n$. En déduire que (V_n) est convergente et trouver sa limite.

6°) Soit la suite $(W_n)_{n \in IN^*}$ telle que $W_n = \frac{1}{n} S_n$ avec $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} U_k$ pour tout $n \in IN^*$
Montrer que (W_n) est convergente et déterminer sa limite.

Ex 4) Soit $f(x) = -1 - \tan(\frac{\pi}{2}x)$

1°) a) Montrer que f réalise une bijection de $]-1,1[$ sur IR. Soit f^{-1} sa réciproque pour tout $x \in]-1,1[$

b) Calculer $f^{-1}(-2)$ et $f^{-1}(0)$

c) Montrer que f^{-1} est dérivable sur IR et que $(f^{-1})'(x) = \frac{-2}{\pi[(x+1)^2 + 1]}$

2°) Soit $\varphi(x) = f^{-1}(x-1) + f^{-1}\left(\frac{1}{x} - 1\right)$ pour tout $x \in IR^*$

a) Montrer que φ est dérivable en tout réel de IR^* et calculer $\varphi'(x)$. En déduire $\varphi(x)$

3°) On pose pour tout $n \in IN^*$ $V_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left[f^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) + f^{-1}\left(-\frac{1}{k}\right)\right]$

a) Montrer que $\forall k \in IN^*$ on a : $f^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) + f^{-1}\left(\frac{-1}{k+1}\right) = -1$

b) Montrer que $V_n = -n - f^{-1}\left(\frac{-1}{n+1}\right)$ $\forall n \in IN^*$

c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{V_n}{n}\right)$