LYCEE PILOTE SFAX	Série d'exercices N°	Mr MEGDICH
		4ème MATH

EXERCICE N°1

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2+u_n^2}{1+u_n} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $0 \prec u_n \prec 2$

2) Etudier la monotonie de la suite u et déduire qu'elle converge vers un réel que l'on précisera

3)a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$; $0 \prec 2-u_{n+1} \prec \frac{2}{3}(2-u_n)$

b) Déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$; $0 \leq 2-u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ puis retrouvé $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4) On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$; $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(u_1+u_2+u_3+\dots\dots+u_n)$

En utilisant 3)b) montré que $v_n \geq \dfrac{2n-2+2\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\sqrt{n}}$ puis calculer la limite de la suite v

EXERCICE N°2

1)Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^3+x^2$ Montrer que f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$

2) Pour tout entier naturel non nul on considère l'équation $(E_n): f(x) = \frac{1}{n}$

a) montrer que l'équation (E_n) admet une solution unique a_n dans l'intervalle $]0,1[$

b) montrer que la suite (a_n) est décroissante

c)Déduire que la suite (a_n) est convergente et préciser sa limite

EXERCICE N°3

Soit (u_n) la suite définie sur IN par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{(u_n)^2+u_n+1}$

1) a)Montrer par récurrence que pour tout n de IN $u_n \leq \frac{1}{n+1}$

b) Etablir que pour tout p de N^*; $1 \leq \frac{1}{u_{p+1}} - \frac{1}{u_p} \leq 1 + \frac{1}{p+1}$

c)Déduire que pour tout n de N^* ; $n \leq \frac{1}{u_n} - 1 \leq n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{K}$

2) Montrer que si p$\in N$ et $p \geq 6$ $alors$ $\sqrt{p} \leq \frac{p-1}{2}$ puis déduire que $\sqrt{p+1} - \sqrt{p} \geq \frac{1}{p}$

3) Montrer que pour tout n de N et n$\geq$ 6; $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \sqrt{n+1}$

Trouver $\lim_{n\to+\infty} \quad (n\,u_n)$