

SUITES REELLES 4^{ème} Mathématiques

Exercice 1

Soit la suite réelle (U_n) définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{3U_n + 4} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq 4$.

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $4 - U_{n+1} \leq \frac{3}{4}(4 - U_n)$. (On pourra commencer par exprimer $4 - U_{n+1}$ en fonction de $4 - U_n$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $4 - U_n \leq 4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

c) Retrouver alors la limite de la suite (U_n) .

3) On considère la suite (S_n) définie sur \mathbb{N}^* par
$$S_n = \sum_{k=1}^n U_k$$

a) Montrer que la suite (S_n) est croissante

b) Montrer par l'absurde que la suite (S_n) n'est pas majorée

c) Déterminer alors la limite de la suite (S_n)

4) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $S_n \geq 4n - 12 \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$

(On pourra utiliser le résultat de la question 2) b)

b) Retrouver alors la limite de la suite (S_n) .

Exercice 2

Soit la suite réelle U définie par :
$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{3U_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leq U_n \leq 3$.

2) Montrer que la suite U est croissante.

3) En déduire que la suite U est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3

Soit la suite réelle U définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{2U_n}{1+(U_n)^2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) a) Etudier le sens de variation sur \mathbb{R} de la fonction $f: x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$

c) Montrer que la suite U est convergente.

d) Déterminer la limite de la suite U .

2) Soit les suites V et S définies sur \mathbb{N} par : $V_n = 1 - U_n$ et
$$S_n = \sum_{k=0}^n V_k$$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq V_{n+1} \leq \frac{2}{5}V_n$

- b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq V_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n$
- c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq S_n \leq \frac{5}{6} \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right]$
- d) Déterminer alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$

Exercice 4

Soit les suites (U_n) et (V_n) définies sur \mathbb{N} par :

$$U_0 = 0 ; V_0 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ on a : } U_{n+1} = \frac{2U_n + V_n}{3} \quad \text{et} \quad V_{n+1} = \frac{3U_n + 2V_n}{5}$$

- 1) Calculer U_1 et V_1
- 2) Montrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \leq V_n$
- 3) Montrer que la suite (U_n) est croissante et que la suite (V_n) est décroissante.
- 4) Montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont convergentes et qu'elles admettent la même limite.
- 5) Soit la suite (W_n) définie sur \mathbb{N} par : $W_n = 9U_n + 5V_n$
 - a) Montrer que (W_n) est une suite constante.
 - b) En déduire la valeur de la limite commune des suites (U_n) et (V_n) .

Exercice 5

Soit la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par : $U_{n+1} = \sqrt{\frac{U_n + 1}{2}}$

- 1) Dans cette question on suppose que $U_0 = \cos x$ où $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$
 - a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n = \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$
 - b) En déduire la limite de la suite (U_n) .
- 2) Dans cette question on suppose que $U_0 \in]0, 1[$
 - a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n < 1$
 - b) Montrer que la suite (U_n) est monotone.
 - c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 6

Soit la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par : $U_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = \frac{3U_n - 1}{2U_n}$

- 1) a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \geq 1$
 - b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.
 - c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.
- 2) Soit la suite (V_n) définie sur \mathbb{N} par : $V_n = \frac{2U_n - 2}{2U_n - 1}$
 - a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$
 - b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n
 - c) Retrouver la limite de U_n .
- 3) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n > 1$



b) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n - 1 \leq \frac{1}{2^n}$

c) Retrouver alors la limite de U_n .

Exercice 7

Soit la suite (U_n) définie sur \mathbb{N}^* par : $U_1 = 1$, $U_2 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_{n+2} = 6U_{n+1} - 8U_n$

Soit la suite (W_n) définie sur \mathbb{N}^* par : $W_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}$

1) a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $W_{n+1} = 6 - \frac{8}{W_n}$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $2 < W_n < 4$

c) Montrer que la suite w est croissante

d) Montrer que la suite w est convergente et déterminer sa limite.

2) Soit la suite réelle t définie sur \mathbb{N}^* par $t_n = \frac{W_n - 4}{W_n - 2}$

a) Montrer que t est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $W_n = \frac{2(1+2^n)}{1+2^{n-1}}$

c) En déduire que $U_n = 2^{n-2}(1 + 2^{n-1})$

d) Déterminer la limite de la suite U .

Exercice 8

Soit la suite réelle U définie sur \mathbb{N}^* par $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

1) Montrer que la suite U est croissante.

2) Montrer que $\forall n \geq 1$ on a : $U_{2n} - U_n \geq \frac{1}{2}$

3) En déduire que la suite U n'est pas majorée.

4) Déterminer la limite de la suite U .

Exercice 9

On considère la suite (U_n) définie sur \mathbb{N}^* par :

$$U_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{k}{3^k} = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} - \frac{3}{3^3} + \dots + (-1)^n \frac{n}{3^n}$$

1) Montrer que la suite (U_{2n}) est décroissante.

2) Montrer que la suite (U_{2n+1}) est croissante.

3) a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a : $U_{2n} > U_{2n+1}$

b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_{2n} - U_{2n+1})$.

4) Montrer que la suite (U_n) converge vers un réel α et que $U_3 < \alpha < U_2$

Exercice 10

Soit la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par : $U_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = \frac{2U_n + 3}{U_n + 4}$

- 1) a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq 1$
 b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.
 c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.
- 2) Soit la suite (V_n) définie sur \mathbb{N} par : $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 3}$
 a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n V_k$
 c) Exprimer U_n en fonction de n et retrouver la limite de U_n .

Exercice 11

Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = \frac{U_n^2 - 3U_n + 6}{U_n - 1}$

- 1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $3 \leq U_n \leq 4$
 b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.
 c) Montrer que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.
- 2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{2}(U_n - 3)$
 b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n - 3 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$
- 3) On admet que $\forall n \geq 4$ on a : $2^n \geq n^2$

Soit la suite (V_n) définie sur \mathbb{N} par : $V_n = n(U_n - 3)$

- a) Montrer que $\forall n \geq 4$ on a : $V_n \leq \frac{1}{n}$
 b) Déterminer alors la limite de la suite V .

Exercice 12

- 1) a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a : $1 - \frac{1}{k^2} = \left(\frac{k-1}{k}\right) \left(\frac{k+1}{k}\right)$
 b) Soit $U_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$; $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$
- 2) Soit $V_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$; $n \in \mathbb{N}^*$
 a) Montrer que la suite (V_n) est croissante.
 b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $V_{2n} - V_n \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$
 c) En déduire que la suite (V_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 13

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On définit sur \mathbb{N} deux suites réelles U et V par

$$\begin{cases} U_0 = a & V_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N} & U_{n+1} = \frac{2U_n V_n}{U_n + V_n} \quad \text{et} \quad V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} \end{cases}$$

- 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n < V_n$
 2) Montrer que la suite U est croissante et que la suite V est décroissante.

- 3) Montrer que les suites U et V sont convergentes
- 4) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $V_{n+1} - U_{n+1} < \frac{1}{2}(V_n - U_n)$
- b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $V_n - U_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a)$
- c) En déduire que les suites U et V sont adjacentes et qu'elles ont la même limite L .
- 5) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n V_n = ab$.
- b) En déduire la valeur de L .

Exercice 14

Soit la suite réelle (U_n) définie sur \mathbb{N} par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{2+U_n} \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}$

- 1) Calculer U_1 et U_2 et en déduire que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
- 2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n > 0$.
- b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.
- c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.
- 3) Soit la suite (V_n) définie sur \mathbb{N} par : $V_n = \frac{U_n}{1+U_n}$
- a) Montrer que la suite (V_n) est géométrique.
- b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n = \frac{1}{2^{n+1}-1}$
- c) Retrouver la limite la suite (U_n)

Exercice 15

Soit la suite réelle (U_n) définie sur \mathbb{N} par : $U_0 = -3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = \frac{U_n - 8}{2U_n - 9}$

- 1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n < 1$
- b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.
- c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.
- 2) Soit la suite réelle (W_n) définie sur \mathbb{N} par : $W_n = \frac{U_n - 1}{U_n - 4}$
- a) Montrer que la suite (W_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- b) Exprimer W_n puis U_n en fonction de n et retrouver la limite de la suite (U_n) .
- 3) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{7}|U_n - 1|$
- b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_n - 1| \leq 4 \left(\frac{1}{7}\right)^n$
- c) Retrouver la limite de la suite (U_n) .

Exercice 16

Soit la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1+(U_n)^2}{2U_n} \end{cases}$$

- 1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \geq 1$
- 2) a) Etudier la monotonie de la suite (U_n) .
b) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.
- 3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$
b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et retrouver la limite de la suite (U_n)
- 4) Soit la suite (S_n) définie sur \mathbb{N}^* par : $S_n = \sum_{k=1}^n U_k$
a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $n \leq S_n \leq n + 1 - \frac{1}{2^n}$
b) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$

Exercice 17

Soit la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par : $U_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = \frac{2U_n}{1+(U_n)^2}$

- 1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n < 1$.
b) Montrer que la suite (U_n) est monotone.
c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.
- 2) Soit la suite (V_n) définie sur \mathbb{N} par : $V_n = \frac{1-U_n}{1+U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $V_{n+1} = (V_n)^2$.
b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^n}$
c) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$; $P_n = V_0 \times V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$ montrer que $P_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n+1}-1}$
d) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{P_n}{V_{n+1}}\right)$

Exercice 18

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}(1+x^2)}$

- 1) a) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et déterminer $f'(x)$.
b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$ on a : $f'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$
- 2) Soit la suite réelle (U_n) définie sur \mathbb{N} par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.
a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq 1$
b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}|U_n - 1|$
c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_n - 1| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$
d) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$