LYCEE PILOTE SFAX	Série d'exercices N°	Mr MEGDICH
		4ème MATH

EXERCICE N°1

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+\sqrt{1+u_n^2}} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $0 \le u_n \le 1$

2) a)Etudier la monotonie de la suite u b) Déduire que la suite (u_n) converge et calculer sa limite

3)a) Montrer que pour tout x de $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$; $\dfrac{\tan x}{1+\sqrt{1+\tan^2 x}} = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$

b)Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$; $u_n = \tan(\frac{\pi}{2^{n+2}})$ retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

EXERCICE N°2

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{\sqrt{3+u_n^2}} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $0 \le u_n \prec 1$

2)a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} \succ \dfrac{1+u_n}{2}$

b) Etudier alors la monotonie de la suite u et montrer qu'elle converge

3)a) Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $1-u_{n+1} \prec \dfrac{1}{2}(1-u_n)$

b) Déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$; $0 \prec 1-u_n \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

EXERCICE N°4

Pour tout entier naturel non nul ,on considère la fonction f_n *définie sur* $[0,+\infty[$ *par* $f_n(x) = x + n\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

1) Dans cette question on prend n =1

On considère la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} g(x) = \dfrac{\sin(f_1(x))}{\sqrt{x}} & \text{si } x \succ 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$

a)Montrer que g est continue à droite de 0

b) Déterminer la limite de g en $+\infty$

2) Montrer que pour tout entier naturel non nul ,la fonction f_n est strictement croissante sur $[0,+\infty[$

3) a)Montrer que pour tout entier naturel non nul, l'équation $f_n(x)=1$ admet dans l'intervalle $]0,1[$ une unique solution α_n

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel positif x , $f_{n+1}(x) - f_n(x) \ge 0$

c) En déduire que pour tout entier naturel non nul n , $f_{n+1}(\alpha_n) \ge 1$ et que la suite (α_n) est décroissante

d) En déduire que la suite (α_n) est convergente

e) Vérifier que pour tout entier naturel non nul n, $\sqrt{\dfrac{\alpha_n}{1+\alpha_n}} = \dfrac{1-\alpha_n}{n}$ et en déduire la limite de la suite $(\alpha_n$

EXERCICE N°5

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies par $\begin{cases} u_0 = 1 \quad , \quad v_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n{}^2}{u_n + v_n} \quad , \quad v_{n+1} = \dfrac{v_n{}^2}{u_n + v_n} \end{cases}$, $n \geq 0$.

1. Vérifier que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_n - u_n = 1$.
3. a. Montrer que (u_n) est décroissante.

   b. En déduire que (u_n) est convergente.
4. Montrer que (v_n) est convergente.
5. Déterminer la limite de chacune des suites (u_n) et (v_n).