Exercice n°1:

Soit (U_n) la suite définie sur IN par : $U_0 = 1$ et pour tout $n \in IN$ $U_{n+1} = \left(\dfrac{n+2}{2n+2}\right)U_n$.

1- Montrer que pour tout $n \in IN$: $0 < U_n \leq 1$.

2- Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

3- En déduire qu'elle est convergente puis montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$.

4- Soit (V_n) la suite définie sur IN par : $V_n = \dfrac{U_n}{n+1}$.

a- Montrer que la suite (V_n) est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b- Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

c- En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{2^n}$.

Exercice n°2:

Soit U la suite définie sur IN par : $U_0 = 0$ et pour tout $n \in IN$: $U_{n+1} = \dfrac{U_n + 1}{\sqrt{U_n^2 + 3}}$

1- Montrer que pour tout $n \in IN$: $0 \leq U_n < 1$

2-a- Montrer que pour tout $n \in IN$: $U_{n+1} > \dfrac{1+U_n}{2}$

b- En déduire que la suite U est croissante et qu'elle est convergente.

3- Montrer que pour tout $n \in IN$: $0 < 1 - U_{n+1} < \dfrac{1}{2}(1 - U_n)$ et calculer alors la limite de U_n en $+\infty$.

4- On pose pour tout $n \in IN$: $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} U_k$

Montrer que pour tout $n \in IN$: $n - 1 \leq S_n \leq n + 1$ et en déduire la limite $\dfrac{Sn}{n}$ en $+\infty$.

Exercice n°3:

Soit (U_n) la suite définie sur IN^* par : $U_n = \dfrac{n}{2^{n-1}}$.

1-a- Montrer que pour tout $n \in IN^*$: $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$ et en déduire que la suite (U_n) est décroissante.

b- Prouver alors que la suite (U_n) est convergente .

2- Montrer que pour tout $n \in IN^*$: $U_{n+1} = \dfrac{1}{2}U_n + \dfrac{1}{2^n}$ et en déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$.

3- Soit pour tout $n \in IN^*$: $S_n = 1 + \dfrac{2}{2^1} + \dfrac{3}{2^2} + \dfrac{4}{2^3} + \cdots + \dfrac{n}{2^{n-1}}$

Montrer que pour tout $n \in IN^*$: $S_n = -U_n + 4\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$ et en déduire la limite de S_n.

Exercice n°4:

Soit $(U_n)_{n \in IN}$ la suite réelle définie par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \dfrac{2}{\sqrt{4 - U_n^2}}$ pour tout $n \in IN$.

1-a- Montrer que, pour tout $n \in IN$, on a : $0 \leq U_n < \sqrt{2}$.

b- Montrer que la suite (U_n) est croissante et qu'elle est convergente vers une limite qu'on précisera.

Exercice n°3 :

On considère la suite (U_n) définie, pour $n \geq 2$ par $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

1. Calculer U_2, U_3 et U_4.

2. Montrer que pour tout $n \geq 2$ et pour tout réel x, $\left(1-e^{ix}\right)\left(1+e^{ix}+e^{i2x}+...+e^{i(n-1)x}\right)=1-e^{inx}$.

3. En déduire que pour tout $n \geq 2$, $\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}} = \frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}$.

4. Vérifier que pour tout $n \geq 2$, $1-e^{i\frac{\pi}{n}} = -2i\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)e^{i\frac{\pi}{2n}}$.

5. En déduire que pour tout $n \geq 2$, $U_n = \frac{1}{n\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

6. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ et vérifier que U_4 est une valeur approchée, de cette limite à 10^{-1} près.

Exercice n°4 :

Soit la suite U définie sur IN par $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \sqrt{2U_n+3} \text{ pour tout } n \in IN \end{cases}$

1- Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN$ on a $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 3$.

2-a- Montrer que la suite U est croissante.

b- En déduire que U est convergente et déterminer sa limite.

3-a- Montrer que pour tout $n \in IN$ on a $3 - U_{n+1} \leq \frac{2}{5}(3-U_n)$

b- En déduire pour tout $n \in IN$ on a $3 - U_n \leq 3\left(\frac{2}{5}\right)^n$.Retrouver la limite de U.

Exercice n°5 :

Soit (U_n) la suite réelle définie sur IN^* par : $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1- Montrer que la suite (U_n) est croissante.

2-a- Montrer que pour tout $k \in IN^* \setminus \{1\}$: $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

b- En déduire que pour tout $n \in IN^*$: $U_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.

c- Montrer alors que la suite est (U_n) convergente.