Lycée Pilote de Sfax A/S 2019-2020	Série N°4 Suites réelles	Mr : Mourad EL arbi $4^{ème}$ Math$_4$

1 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 5}{u_n + 1}, n \geq 0. \end{cases}$

① Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.

② Montrer que si la suite (u_n) est convergente alors elle converge vers $\sqrt{5}$.

③ a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \sqrt{5}| \leq \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)|u_n - \sqrt{5}|$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \sqrt{5}| \leq \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n$.

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2 Soit (U_n) la suite définie par $\begin{cases} U_0 = 1, \\ U_{n+1} = 2U_n + \dfrac{1}{U_n}, n \geq 0. \end{cases}$

① a) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $U_n > 0$.

b) En déduire que la suite (U_n) est croissante.

② a) Montrer que la suite (U_n) est non majorée.

b) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

③ Pour tout $n \geq 0$, on pose $V_n = \dfrac{U_n}{2^n}$.

a) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, $0 < V_{n+1} - V_n \leq \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

b) Montrer alors que (V_n) est majorée par 2.

c) En déduire que la suite (V_n) est convergente.

3 Soit (U_n) la suite définie par $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$, $n \geq 1$.

① a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $U_n \geq \sqrt{n}$.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

② Soit (V_n) la suite définie par $V_n = U_{2n} - U_n$, $n \geq 1$.

a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $V_n \geq \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}$.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

4 Soit (t_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $t_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}$.

③ Montrer que la suite (t_n) converge vers 0.

③ Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} t_k$.

a) Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3.

b) On désigne par $v_n = u_{2n}$ et par $w_n = u_{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

c) En déduire que la suite $(u_n$

d) Donner un encadren