EXERCICE N°1 :

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \sqrt{1+\frac{1}{2}U_n^2} \end{cases}$

1-Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \prec U_n \le \sqrt{2}$

2-Etudier la monotonie de (U_n).Prouver que (U_n) est convergente et calculer sa limite

3-Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1}^2 - U_n^2 = \frac{1}{2^{n+1}}$;en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \sqrt{2(1-\frac{1}{2^{n+1}})}$

4-Soit la suite(V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = n^2(2-U_n^2)$

a- Vérifier que $V_n = \frac{n^2}{2^n}$

b- Déterminer le plus petit entier naturel N tel que $\forall n \ge N, V_{n+1} \prec \frac{3}{4}V_n$ et que $\forall n \ge N,\ V_n \le \left(\frac{3}{4}\right)^{n-N} V_N$

c- Montrer que (V_n) est convergente et déterminer sa limite

5-On pose pour tout $n \ge 5, S_n = V_5 + V_6 + \dots\dots\dots + V_n$

a- Montrer que $S_n \le \left[1+\left(\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\dots\dots+\left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right]V_5$ et que $\forall n \ge 5, S_n \le 4V_5$

b- Montrer que la suite $(S_n)_{n\ge5}$ est croissante , qu'elle est convergente vers une limite L et que $V_5 \le L \le 4V_5$

EXERCICE N° 2:

Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} U_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_{n+1} = \frac{1}{n+1}U_n + 1 \end{cases}$

1^0) Calculer U_2 , U_3 , et U_4

2^0) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ 1 \le U_n \le 2$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1}(1-U_{n-1})$ En déduire que la suite U est convergente

3^0) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 \le U_n \le 1 + \frac{2}{n}$ et calculer la limite de U_n

4^0) Soit la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n-2} U_k$

a) Montrer que pour tout $n \geq 3$ $S_n \geq n-2$ (on utilisera 2^0)a))

b) Déterminer alors $\lim\limits_{x \to +\infty} S_n$

5^0) Soit la suite V définie sur $\mathbb{N}^*$ par $V_n = \dfrac{1}{n!}\sum\limits_{k=1}^{n} k!$ a) Calculer V_1 , V_2 , V_3 , V_4 .Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,$U_n = V_n$

b) En déduire la limite de la somme $\sigma_n = 1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n(n-1)} + \dfrac{1}{n(n-1)(n-2)} + ... + \dfrac{1}{n!}$

EXERCICE N⁰3

Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\sqrt{3u_n^2 + 4} \end{cases}$

1^0) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $0 \prec u_n \leq 2$

2^0) Soit la suite V définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = u_n^2 - 4$.Montre que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. Exprimer V_n en fonction de n

3^0) Calculer $u_{n+1}^2 - u_n^2$ en fonction de v_n et en déduire que la suite u est croissante ,qu'elle est convergente et calculer sa limite

4^0) a) Montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\dfrac{1}{u_n + 2} \leq \dfrac{1}{3}$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \left|u_n - 2\right| \leq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ et retrouver la limite de u_n

5^0) Calculer la somme $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k^2$ et limite de S_n

EXERCICE N⁰4 :

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 - \alpha^2 \; u_n^2 + 1} \end{cases}$

I-On suppose que α=0

1^0)a) Montrer que la suite (U_n) est croissante

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n-1} \leq u_n \leq \sqrt{n}$ .Calculer limite de

2^0) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = u_{n+1} - u_n$

a) Vérifier que $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1} + u_n}$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\dfrac{1}{2u_{n+1}} \leq v_n \leq \dfrac{1}{2u_n}$ En déduire que (v_n) est convergente et calculer sa limite

3^0) On pose $S_n=\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u2}+........+\frac{1}{un}$

a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*\ S_n\geq\frac{n}{\sqrt{n}}$; En déduire la limite de S_n

b) Prouver que $\forall n\in\mathbb{N}^*, 1+\frac{1}{2}(S_n-1)\leq u_n\leq 1+\frac{1}{2}S_n$ Calculer la limite de $\frac{u_n}{S_n}$

II) On suppose que $\alpha\in\left]0,1\right[$

1^0) a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, 0\leq u_n\prec\frac{1}{\alpha}$

a) b) En déduire que $\forall n\in\mathbb{N},\frac{1}{u_n+\frac{1}{\alpha}}\leq\alpha$ et que $\left|u_n-\frac{1}{\alpha}\right|\leq\alpha\left|u_n^2-\frac{1}{\alpha^2}\right|$

2^0) On pose $w_n=u_n^2-\frac{1}{\alpha^2}$ a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique et calculer sa limite

b) En déduire que (u_n)est convergente et calculer sa limite

EXERCICE N^{0}5

Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0=1 \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\frac{2u_n}{\sqrt{2u_n^2+1}}\end{cases}$

1^0) a) Montrer que pour tout n $\in\mathbb{N}$ $0\prec u_n\leq\sqrt{\frac{3}{2}}$

c) Etudier la monotonie de la suite U

d) En déduire que U est convergente et calculer sa limite

2^0) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$par : $v_n=\frac{2u_n^2}{2u_n^2+3}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

c) Retrouver la limite de u_n

3^0) a) Montrer que pour tout n $\in\mathbb{N}$ $\frac{1}{2u_n^2+1}\leq\frac{1}{3}$

b) Déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \left|u_{n+1}^2 - \frac{3}{2}\right| \leq \frac{1}{3}\left|u_n^2 - \frac{3}{2}\right|$ et que $\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_n^2 - \frac{3}{2}\right| \leq \frac{1}{2.3^n}$; En déduire la limite de (u_n)

EXERCICE N°6:

Soient les suites u et v définies sur IN*par $u_1=0$, $v_1=1$ et pour tout n $\in$ IN*

$$u_n = \frac{u_{n-1}+v_{n-1}}{2} ; v_n = \frac{u_n + v_{n-1}}{2}$$

1) Soit la suite w définie sur IN* par $w_n=u_n-v_n$

a) Montrer que la suite w est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme

b) Exprimer w_n en fonction de n

2) a) Montrer que la suite u est croissante et la suite v est décroissante

b)Justifier que $\forall n \in IN^*, 0 \leq u_n \leq v_n \leq 1$

c) En déduire que (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont une même limite L

3) a) Montrer que $\forall n \in IN \ u_{n+1} = u_n - \frac{1}{2} w_n$

b)En déduire u_n en fonction de n puis calculer L

EXERCICE N°7 :

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ par

$U_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $V_n = \frac{2}{U_n}$

et $U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}$

1- Montrer que les suites (U_n) et (V_n)sont minorées par 1 et majorées par 2

2- a- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - V_{n+1} = \frac{(U_n - V_n)^2}{2(U_n + V_n)}$

b- Déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} \ U_n \geq V_n$

3- Montrer que la suite (U_n) est décroissante , la suite (V_n) estcroissante et qu'elles sont convergentes

On pose $L = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ et $L' = \lim\limits_{n \to +\infty} V_n$

4- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \ U_n - V_n \leq 1$ et en déduire que $(U_n - V_n)^2 \leq U_n - V_n$

5- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \ U_{n+1} - V_{n+1} \leq \frac{1}{4}(U_n - V_n)$ et que $U_n - V_n \leq \frac{1}{4^n}$. Prouver alors que L=L'

6- a- Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N} \left|U_{n+1} - \sqrt{2}\right| = \frac{1}{2U_n}\left(U_n - \sqrt{2}\right)^2$

b- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \left|U_n - \sqrt{2}\right| \leq 1$ et que $\left|U_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left|U_n - \sqrt{2}\right|$.Déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$

$\left|U_n - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2^n}$ et calculer L

CONTINUITE ET LIMITE
4°M-4°Sc

EXERCICE N°1

Soit la fonction f définie par f(x) = $\dfrac{\sqrt{1+x}-(1+\frac{1}{2}x)}{x^2}$ .Déterminer D_f

1- Déterminer la limite de f en 0

2- Soit la fonction g définie par $\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ si } x \neq 0 \\ g(0) = a \end{cases}$ .Déterminer le réel a pour que g soit continue en 0

EXERCICE N°2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{\pi}{x^2}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1- Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$

2- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

EXERCICE N°3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right) + 1 - x^2 \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1- Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$

2- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

EXERCICE N°4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = $\sqrt{4x^2-1}$ -(2x-1)

1- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $|f(x)-1| \leq \dfrac{1}{4x}$

2- En déduire a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2-1}-2x$

3- Soit g(x) = $\sqrt{4x^2-1}$ et Δ la droite d'équation y = 2x .Interpréter géométriquement les résultats a et b de la question précédente

EXERCICE N°5

Soit la fonction f définie par f(x) = $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

1- Déterminer un prolongement par continuité gde f en 0

2- Soit h(x) = $\dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.Expliciter pour tout x∈ $\mathbb{R}_+^*$, foh(x)

3- En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}-1\right)$

EXERCICE N°6

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{2x^3+2x^2-10x+11}{2(x-1)^2}$

On appelle C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Montrer que f peut s'écrire sous la forme : $f(x)=x+3+\dfrac{5}{2(x-1)^2}$
2. a. Calculer la limite de f aux bornes de son intervalle de définition
   b. Déterminer les asymptotes à la courbe
   c. Etudier la position relative de la courbe C et de la droite Δ d'équation : $y=x+3$
3. On admet que le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$	1	2.7	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\Vert$	$\searrow$ $6{,}5$	$\nearrow$

   a. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle$]-4\,;-1[$.
   b. Donner une valeur approchées de α à 10^{-2} près par défaut.
   c. Combien l'équation $f(x)=10$ admet-elle de solutions dans l'intervalle$]1\,;+\infty[$? Justifier.
4. Quels sont les points d'intersection de C avec l'axe des ordonnées ? l'axe des abscisses ?
5. Tracer dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ les asymptotes, la courbe C, α et les points d'intersection avec les axes

EXERCICE N°7

Soit la fonction f définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=\operatorname{tg}x-\frac{\pi}{2}+x$

1- Dresser le tableau de variation de f

2- Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

3- Montrer que $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{4}$

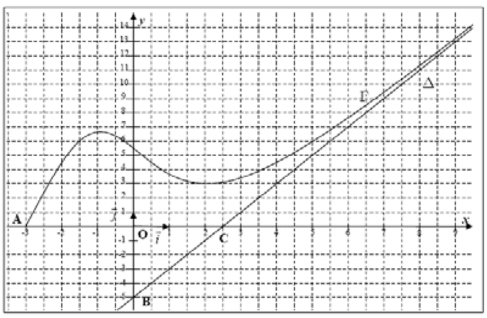
EXERCICE N°8

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-3\,;+\infty[$, croissante sur les intervalles $[-3\,;-1]$ et $[2\,;+\infty[$ et décroissante sur l'intervalle $[-1\,;2]$.

On note f' sa fonction dérivée sur l'intervalle $[-3\,;+\infty[$.

La courbe Γ représentative de la fonction f est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Elle passe par le point $A(-3\,;0)$ et admet pour asymptote la droite Δ d'équation $y=2x-5$.



1-Montrer que l'équation $f(x)=4$ admet au moins une solution sur son domaine de définition

2- Soit $g(x)=f(x)-4$ .Déterminer $g(-3)$ et $g(-1{,}5)$ puis montrer que l'équation $f(x)=4$ admet une solution unique dans l'intervalle $]-3,-1{,}5[$

Exercice n°9 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x}\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)}{x-1} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^*\setminus\{1\} \\ f(x)=x+\sqrt{x^2-2x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

1- a- Encadre f(x) pour $x \in]0,1[$

b- Montrer alors que f est continue en 0

c- Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2- On pose $u(x)=\dfrac{\pi(x-1)}{x}$; $v(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ et $w(x)=\dfrac{\pi}{\sqrt{x}}$; $x\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$

a- Vérifier que $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$, $f(x)=w(x).v\circ u(x)$

b- En déduire que f admet un prolongement par continuité g en 1

c- C- A l'aide de g montrer que l'équation $\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)=3\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ admet dans l'intervalle $]1,2[$ une solution β

Gabès 09-10	Théorème des valeurs intermédiaires	Amorri Mongi

Exercice n°1 :

1- Montrer que l'équation $x^3+3x-1=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une seule solution α et que $\alpha \in]0,1[$

2- Soit $f(x)=\dfrac{1-2x}{1+x^2}$ .Montrer que α est l'unique solution de l'équation f(x) = x

Exercice n°2 :

Soit la fonction f définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \text{tg}x - \frac{\pi}{2} + x$

1- Dresser le tableau de variation de f
2- Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution $\propto$ dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$
3- Montrer que $\frac{\pi}{6} < \propto < \frac{\pi}{4}$

Exercice n°3 :

Soit la fonction f_n définie par $f_n(x) = x^3+3(n+1)x+1$

1- a- Etudier les variations de f_0
b- Déterminer $f(\mathbb{R})$
c- En déduire que l'équation $f_0(x)=0$ admet une solution unique u_0 et que $u_0 \in]-1,0[$
2- a- Prouver que pour tout entier naturel n l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution u_n et que $u_n \in]-1,0[$
b- Donner les valeurs de $f_n(u_n)$ et $f_{n+1}(u_n+1)$
c- Montrer que $\forall x \in]-1,0[$ et $\forall n \in ς$, $f_{n+1}(x) < f_n(x)$
d-Déduire que la suite (u_n) est décroissante

Exercice n°4 :

Soit la fonction f_n définie sur $[0,+\infty[$ par $f_n(x)=x^n+x^{n-1}+\dots\dots\dots x^2+x-1$; n étant un entier naturel non nul

1- Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet dans $[0,+\infty[$ une solution unique α_n .
2- a- Pour tout entier $n \geq 1$ et pour $x \succ 0$ comparer $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$
b- En déduire que $f_{n+1}(\alpha_n) \succ 0$ et que la suite (α_n) est décroissante
c- Démontrer que pour tout entier $n \geq 2, 0 \prec \alpha_n \leq \frac{3}{4}$ et calculer $\lim \alpha_n^{n+1}$
3- a- Montrer que $\forall x \neq 1, f_n(x) = \dfrac{x^{n+1}-2x+1}{x-1}$
b- En déduire que $\alpha_n^{n+1} = 2\alpha_n - 1$
c- Démontrer que la suite (α_n) est convergente et calculer sa limite
4- On pose pour tout $n \geq 1$ $u_n = \alpha_n - \dfrac{1}{2}$
a- Vérifier que $\forall n \geq 2, 0 \prec u_n \leq \dfrac{1}{4}$
b- Montrer que pour tout entier n non nul $(1+2u_n)^{n+1} = 2^{n+2}u_n$
c- En déduire que pour tout entier $n \geq 2, 0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}$ et calculer $\lim u_n$

EXERCICES CORRIGES SUR LA FONCTION RECIPROQUE

EXERCICE N°1:

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ où l'unité de longueur est 2cm .

On considère la fonction f définie sur $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ par : $f(x) = \sqrt{1+tg(x)}$.

1)a)Justifier la dérivabilité de f sur $]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ puis exprimer $f'(x)$ en fonction de x .

b)Etudier la dérivabilité de f à droite en $-\frac{\pi}{4}$ et interpréter ,graphiquement ,le résultat obtenu .

c)Dresser le tableau de variations de f .

d)Préciser les points d'intersection de la courbe C_f de f avec l'axe des ordonnées ,puis la construire dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2)a)Montrer que f réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ dans un intervalle I que l'on précisera .On note g la bijection réciproque de f .

b)Calculer g(0) ;g(1) et $g(\sqrt{2})$.

c)Construire ,dans le même repère , la courbe C_g de g .

3)Justifier la dérivabilité de g sur I , et montre que $g'(x) = \frac{2x}{x^4-2x^2+2}$.

4)On définit la suite $(U_n)_{n\in N}$ par : $\forall n\in N$, $U_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} g(k)$.

a)Montrer que $\forall n\in N$, $g(n) \leq U_n \leq g(2n)$.

b)En déduire que $(U_n)_{n\in N}$ converge vers une limite que l'on calculera .

EXERCICE N°2:

Le plan est muni d'un repère orthonormé directe $(O,\vec{i},\vec{j})$ où l'unité de longueur est 3cm.

On considère la fonction f définie sur]1,2] par $f(x) = \frac{\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$.

1)a)Justifier la dérivabilité de f sur]1,2[et exprimer $f'(x)$ en fonction de x .

b)Etudier la dérivabilité de f à gauche en 2 et interpréter ,graphiquement, le résultat obtenu .

c)Dresser le tableau de variations de f , puis construire la courbe C_f représentative de f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2)a)Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans]1,2] une solution unique α .

b)Vérifier que $\alpha \in]\frac{3}{2},2[$.

3)a)Montrer que f réalise une bijection de]1,2] dans un intervalle I que l'on précisera
Désormais, on note g la bijection réciproque de f .

b)Construire la courbe représentative C_g de g dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

c)Montrer que $\forall\ x \in I$, $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

EXERCICE N°3:

On considère la fonction g définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $g(x) = \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$.

1)Justifier la dérivabilité de g sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et montrer que $g'(x) = \frac{1}{1-\sin x}$.

2)Déduire que g est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans un intervalle J que l'on précisera .

3)Montrer que g^{-1} est dérivable sur J , et que $(g^{-1})'(x) = \frac{2}{x^2+1}$.

4)$\forall x \in J$, on pose : $\varphi(x) = g^{-1}(x) + g^{-1}(\frac{1}{x})$.

a)Montrer que φ est dérivable sur J et calculer $\varphi'(x)$.

b)En déduire que $\forall x \in J$, $g^{-1}(\frac{1}{x}) = - g^{-1}(x)$.

EXERCICE N°4:

On considère la fonction f définie sur $\Re_+$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{-1+\sqrt{1+x^2}}{x}, & \text{si } x \neq 0 . \\ f(0) = 0 . \end{cases}$

On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ ou l'unité de longueur est 2cm .

A)

1)a)Montrer que f est continue en 0 .
b)Montrer que f est dérivable en 0 .
2)a)Donner l'équation de la demi tangente T à C au point d'abscisse 0 , puis étudier la position relative de C et T .
b)Dresser le tableau de variations de f .
c) Construire C et T .
3)a)Montrer que f réalise une bijection de $\Re_+$ dans un intervalle I que l'on précisera .
b)Exprimer $f^{-1}(x)$,en fonction de x , pour tout réel x de I .
c) Construire ,dans le même repère , la courbe C' représentative de f^{-1} .

B)

Soit h la fonction définie sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ par : $h(x) = f(\text{cotg}(x))$.

1)Justifier la définition de h sur $]0,\frac{\pi}{2}]$.

2)Montrer que h est dérivable en $\frac{\pi}{2}$ et calculer $h'(\frac{\pi}{2})$.

3)Vérifier que $\forall x \in]0,\frac{\pi}{2}[$, $h(x) = \frac{1-\sin x}{\cos x}$.

4)Montrer que h réalise une bijection de $]0,\frac{\pi}{2}]$ dans I .On note h^{-1} la bijection réciproque de h .
5)Montrer que h^{-1} est dérivable sur I et expliciter $(h^{-1})'(x)$ en fonction de x .

exercices sur les isométries du plan

exercice n° 1

Soit ABCD et CEFD deux carrés tels que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$,de centre respectifs I te J et soient les points O , L , K les milieux respectifs des segments [CD],[EF] et [CE].

1- Soit f une isométrie qui transforme le carré ABCD en CEFD
   - a- Montrer que f(I) = J
   - b- Déduire qu'il existe une seule symétrie orthogonales et une seule translation que l'on précisera qui transforme le carré ABCD en CEFD
2- Déterminer trois rotations qui transforment le carré ABCD en CEFD
3- Soit f l'isométrie définie par f(A)=C ; f(B)=D ; f(C)=F et f(D)=E
   - a- Déterminer f(O)
   - b- Montrer que f ne peut pas avoir des points invariants
   - c- Construire l'image F' de F par f
   - d- Calculer fof(A) ; fof(B)et fof (C) .Caractériser fof
   - e- Trouver un vecteur $\vec{u}$ et une droite Δ tels que f= $s_{\Delta} o t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} o s_{\Delta}$

EXERCICE N°2 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC de sens direct .A' , B' et C' sont les milieux respectifs de [BC] [AC] et [AB] .On pose D = $S_{(AC)}(B)$ et O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

1- Trouver toute les isométries qui laissent globalement invariant le triangle ABC
2- Trouver un déplacement qui transforme ABC en ACD
3- En déduire tous les déplacements qui transforment ABC en ACD et préciser les éléments caractéristiques de chacun d'eux
4- Trouver tout les antidéplacements qui transforment ABC en ACD et déterminer les éléments caractéristiques de chacun d'eux

EXERCICE N°3 :

Dans le plan orienté, on considère deux points distincts A et B .Soit f une isométries du plan.

1- a- Montrer que si f([AB])=[AB] alors fof = Id_P

   b- En déduire toutes les isométries qui laissent globalement invariant [AB]

2- Soient (C) et (C') deux cercles de centres respectifs O et O' .O≠O',et de rayon R et R'

Déterminer toute les isométries qui laissent invariant (C) ∪(C').On distinguera deux cas :

R = R' et R ≠R'

EXERCICE N°4 :

Soit f la transformation du plan définie analytiquement par :au point M(x,y) on associe le point

M'(x',y') tels que $\begin{cases} x'=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{3}y+2\right) \\ y'=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}x-y\right) \end{cases}$

1- On pose z=x+iy et z' = x' +iy'.Montrer que $z'=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\bar{z}+1$
2- On pose O' =f(O) .Vérifier que :O'M' =OM
3- Déterminer l'ensemble d des points invariant par f
4- Soit M'' d'affixe z'' et M''= fof(M) .Exprimer z'' en fonction de z et montrer que fof est une translation de vecteur $\vec{u}$ que l'on précisera.
5- Soit g = $t_{-\frac{1}{2}\vec{u}}of$ .A et B les points d'affixes respectives $z_A=\frac{1}{2}$ et $z_B=-\frac{1}{2\sqrt{3}}i$ .Déterminer les affixes des points A' et B' images respectives de A et B par g .Prouver que g est une symétrie orthogonale dont on précisera l'axe Δ
6- Déterminer alors la nature et les éléments caractéristiques de f

EXERCICE N°5 :

Dans le plan orienté, on considère un rectangle ABCD tel que AB=2AD et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On note I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [DC] et K le symétrique de I par rapport è (DC).

1- O pose f= $S_{(IC)}\circ t_{\overrightarrow{AB}}\circ S_{(IJ)}$
   a- Caractériser l'isométrie $S_{(BC)}\circ S_{(IJ)}$
   b- En déduire que f est une rotation que l'on caractérisera
2- On pose g = $t_{\overrightarrow{IK}}\circ S_{(IC)}$
   a- Caractériser l'isométrie :g$\circ S_{(AJ)}$
   b- En déduire que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur .
3- Soit φ une isométrie qui fixe un point de la droite (AB) et transforme (AB) en (IJ) .
   a- Montrer que φ fixe le point I
   b- Déterminer alors toutes les isométries φ .

EXERCICE N°6 :

Le plan est orienté dans le sens direct .On considère un losange ABCD tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

et on désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [CD] .

1- Montrer qu'il existe une seule isométrie f qui transforme A en B et D en C .
2- Montrer que si f admet un point invariant M alors $M \in (DI) \cap (BJ)$ .Conclure.
3- Montrer que f est une symétrie glissante d'axe (IJ).
4- Déterminer fof(A) et en déduire le vecteur de la symétrie glissante f

EXERCICE N°7 :

Dans le plan orienté on considère un carré ABCD de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Soient les isométries suivantes : $f = S_{(CB)} \circ S_{(AD)} \circ S_{(AB)}$ et $g = S_{(CB)} \circ S_{(AD)}$

1- a- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g

   b-En déduire la nature et les éléments caractéristique de f

2- Soit R la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$
   a- Construire le point E = R(A)
   b- Quelle est la nature du triangle CAE ?.
   c- Montrer que les points B , D et C sont alignés .
3- Soit I le milieu de [EA]
   a- Vérifier que R = $S_{(CI)} \circ S_{(OA)}$
   b- Déduire alors la nature et les éléments caractéristiques de h = $S_{(CI)} \circ R \circ S_{(CI)}$

EXERCICE N° 8:

Dans le plan orienté on considère un carré ABCD de centre I tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On désigne par t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ et par r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1- Montrer que : $t = S_{(\Delta)} \circ S_{(AB)}$ où (Δ) est une droite que l'on déterminera
2- Montrer que r = $S_{(IB)} \circ S_{(\Delta)}$
3- En déduire la nature de f rot et ses éléments caractéristiques

déplacement et antidéplacement

exercice n° 1

Dans le plan orienté on considère un triangle équilatéral ABC de sens direct et soient R et R’ les rotations de centres respectifs A et B et d’angle $\frac{\pi}{3}$ .On pose f= R oR’

Pour tout point M de [AB] ,on considère les points P et Q appartenant respectivement aux segments [AC] et [BC] ,tels que AM = AP BM = BQ .

1- Déterminer f(B) et f(C) .En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f

2- a- Montrer que R(M) = P et R’Q)=M

b- En déduire que la médiatrice de [PQ] passe par un point fixe Ω

c- Montrer que : $S_{(A\Omega)}(Q)=S_{(C\Omega)}(P)$

3- a- Montrer qu’il existe un unique antidéplacement g qui transforme B en C et C en A Préciser la nature et les éléments caractéristiques de g.

b- Déterminer l’ensembles des milieux des segments [PQ] lorsque le point M décrit le segment [AB].

4- Construire le segment [PQ] sachant que la droite (PQ) est parallèle à une droite (Δ) donnée non perpendiculaire à (AB)

<u>Exercice n°2 :</u>

Dans le plan orienté on considère un triangle rectangle et isocèle OAB de sens direct. On note R_A et R_B les rotations de centres respectifs A et B et de même angle $\frac{\pi}{2}$ .Soit C un point non situé sur (AB).On construit les carrés BEDC et ACFG de sens directs.

1- a- Déterminer $R_A \circ R_B(E)$

b- En déduire que O est le milieu de [EG]

2- Soient R_F et R_D les rotations de centres respectifs F et D et de même angle $\frac{\pi}{2}$.

a- Soit f = $R_F \circ S_O \circ R_D$ .Déterminer f(C) puis la nature de f

b- Soit H le point tel que $R_F(H)=D$ .Montrer que EDGH est un parallélogramme

<u>Exercice n°3</u>

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC isocèle tel que AB = AC et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$ et soit I le point tel que le triangle CAI soit un triangle rectangle et isocèle , $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CI}}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et soit h le milieu de [BC] ;J le milieu de [AI] et (Δ) la parallèle à (AB) passant par H.

1- a- Soit r la rotation qui transforme A en I et B en C .Déterminer son angle et construire son centre Ω.

b- Montrer que ABΩC est un losange

2- Montrer qu’il existe un unique déplacement f et un unique antidéplacement g qui transforment A en Ω et B en C .

3- Donner la nature et les éléments caractéristiques de f

4- Soit S la symétrie orthogonale d’axe (AB)

a- Justifier que :g = foS

b- En écrivant f = $S_{(\Delta)} o S_{(\Delta)}$,(Δ') une droite que l’on précisera ,déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g

5- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $r^{-1}og$ et $r^{-1}of$

Exercice n°4

Dans le plan oriente ; on considère un triangle EFG équilatérale de sens indirect et soient les points A,B et C milieux respectifs des segments $[FG]$,$[FE]$ et $[EG]$

1-a- Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui transforme A en E et F en C

b- Montrer que f est une rotation dont on précisera l'angle

2-a- Déterminer $S_{(BC)} \circ S_{(BA)}(A)$ et $S_{(BC)} \circ S_{(BA)}(F)$,en déduire que f = $S_{(BC)} \circ S_{(BA)}$ puis le centre de f

b- Déterminer la droite Δ pour que f = $S_{(\Delta)} \circ S_{(BC)}$

3-Soit H le projeté orthogonal de G sur (BC) ;I et J les milieux respectifs des segments $[GH]$ et $[GB]$ et soit I' = $S_{(BC)}(I)$.On pose g = $t_{\overrightarrow{HG}} \circ S_{(BC)}$. Déterminer g(I) ,en déduire la nature et les éléments caractéristiques de g

4-Soit h = $S_{(CA)} \circ$f

a- Caractériser $S_{(CA)} \circ S_{(\Delta)}$

b- Déduire que h est une symétrie glissante dont on déterminera l'axe et le vecteur

Exercice n°5

Dans le plan orienté ,on considère un losange ABCD tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.On désigne par I , J , K , L et O les milieux respectifs des segments [AB] , [BC] ,[CD] , [DA] et [BD]. On note (Δ) et (Δ') les médiatrices respectives de [AB] et [CD]

1 – a- Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f qui transforme A en B et D en C

b –Prouver que f n'est pas une symétrie orthogonale

2 – Soit S la symétrie orthogonale d'axe (Δ) et R la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

a –Montrer que f = R 0 S

b- Déterminer f (B) puis la nature et les éléments caractéristiques de f

3 – On pose g = f 0 σ . σ Étant la symétrie orthogonale d'axe(Δ'). Déterminer g(C) et donner la nature et les éléments caractéristiques de g .

4 – On pose h = g^{-1} 0 R

a- Prouver que h est une translation que l'on caractérisera

b- La droite (BC) coupe(Δ)en un point M. On pose $M_1 = R^{-1}(M)$ et $M_2 = g^{-1}(M)$.

Montrer que les points M , M_1 et M_2 sont alignés

Exercice n°6:

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que AB = AC et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ .Soient I , J , K les milieux respectifs de [BC] , [CA] , [AB] et soient R = $r\left(I,\frac{\pi}{2}\right)$ et t=$t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}$.

On pose f=Rot et g = toR

1- Déterminer fK) et g(J) .En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f et g
2- Soit M un point quelconque du plan ; M_1 =f(M) et M_2 =g(M) .Montrer que ACM_2 M_1 est un parallelogramme

exercice n° 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = 1+ $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

1 – Etudier les variations de f

2 – Montrer que f est une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera .Soit g sa fonction réciproque, déterminer son domaine de dérivabilité .Calculer g($\dfrac{9}{5}$) et g'($\dfrac{9}{5}$)

3 – Tracer $\left(C_f\right)$ et $\left(\mathrm{C_g}\right)$ dans un même repère orthonormé

4 – Expliciter pour tout x appartenant à J , f^{-1}(x)

5 – Montrer que l'équation f(x) = x admet dans $[0,+\infty[$ une solution unique α et que $1 \prec \alpha \prec 2$

6 – Soit la suite $\left(U_n\right)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ \ \mathrm{U_{n+1}} = \mathrm{f}\left(\mathrm{U_n}\right)$

a – Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ \ 1 \leq U_n \leq 2$

b – Montrer que pour tout a et b $\in [1,2]$, on a $\left|\mathrm{f}(a) - \mathrm{f}(b)\right| \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}|a-b|$ et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $\left|U_{n+1} - \alpha\right| \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left|U_n - \alpha\right|$ et que $\forall n \in \mathbb{N}\ \left|U_n - \alpha\right| \leq \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}}$

c – Prouver que la suite $\left(U_n\right)$ est convergente et calculer sa limite

EXERCICE N°2 : (

I- Soit la fonction $\mathrm{f_n}$ définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\mathrm{f_n}$(x) = x+n-ntgx

1 – a - Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,l'équation $\mathrm{f_n}$(x) = 0 admet dans $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ une solution unique qu'on note u_n

b –Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \dfrac{\pi}{4} \prec u_n \prec \dfrac{\pi}{2}$ et tg $u_n = 1 + \dfrac{u_n}{n}$

2 – a – Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall \mathrm{x} \in \left]\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right[$ $\text{ on a } \mathrm{f_{n+1}(x)} \prec \mathrm{f_n(x)}$

b- Déduire que la suite (u_n) est strictement décroissante et qu'elle est convergente vers une limite que l'on calculera

II- On considère la fonction g définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{1-f_1(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

1- a- Montrer que g est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

b- Justifier la dérivabilité de g sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et calculer g'(x)

2- a- Montrer $\forall x \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, il existe un réel c $\in]0,x[$ tel que $\dfrac{tgx - x}{x} = tg^2 c$

b- En déduire que $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\quad 0 \le \frac{tgx - x}{x} \le tg^2 x$ (1)

c- En déduire que g est dérivable en 0 à droite

3- a- En utilisant (1) montrer que g est strictement croissante et dresser le tableau de variations de g .Montrer que g est une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle I que l'on précisera .On note h sa bijection réciproque. Vérifier que $h\left(\frac{1}{u_1}\right) = u_1$

b- Etudier la dérivabilité de h sur I puis montrer que $h'(\frac{1}{u_1}) = \frac{u_1^2}{u_1^3 + 2u_1^2 + u_1 - 1}$

4- Construire (C_g) et (C_h) dans le même repère .

EXERCICE N°3 :

A) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}, \vec{j}$)

1^0) a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

b) Montrer que f est dérivable en 0 et écrire l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0

2^0) a) Pour x$\neq 0$, déterminer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{1}{1 + x^2 + \sqrt{1+x^2}}$; Dresser le tableau de variation de f

b) Montrer que $0 \le f'(x) \le \frac{1}{2}$

3^0) On pose $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x$

Etudier les variations de g, en déduire le signe de g puis déterminer les positions relatives de (C) et (T)

4^0) a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera

b) Tracer (C) et (C') courbe de f^{-1} dans le même repère

c) Expliciter pour tout $x \in J$; $f^{-1}(x)$

B) Soit h la fonction définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $\begin{cases} h(x) = f(\cot gx) \text{ si } x \neq \frac{\pi}{2} \text{ et } x \neq 0 \\ h(\frac{\pi}{2}) = 0 \text{ et } h(0) = 1 \end{cases}$

1^0) a) Montrer que pour tout x$\in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ $h(x)=\frac{1-\sin x}{\cos x}$

b) Montrer que h est dérivable en $\frac{\pi}{2}$ à gauche et en 0 à droite

2^0) Montrer que h réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J' que l'on précisera ;

calculer $h^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}})$; Justifier que h^{-1} est dérivable en $x_0=\frac{1}{\sqrt{3}}$

3^0) Déterminer le domaine de dérivabilité K de h^{-1} et montrer que pour tout x$\in$K

$(h^{-1})'(x)=\frac{-2}{1+x^2}$

C) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0=1 \\ \forall n\in\mathbb{N}\ ,\ U_{n+1}=f(U_n) \end{cases}$

1^0) Montrer que pour tout n$\in\mathbb{N}$ $0\leq U_n\leq 1$

2^0) a) En utilisant les inégalités des accroissements finis à f sur l'intervalle $[0,U_n]$ montrer que pour tout n$\in\mathbb{N}$ $0\leq U_{n+1}\leq\frac{1}{2}U_n$

b)En déduire que pour tout n$\in\mathbb{N}$ $0\leq U_n\leq\frac{1}{2^n}$ .Déduire la limite de U_n

c) Montrer que pour tout n$\in\mathbb{N}$, $U_n=tg(\frac{\pi}{2^{n+2}})$

d) Calculer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $2^{n+2}U_n$

EXERCICE N°4

Soit la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\begin{cases} f_n(x)=\frac{x^{n+1}-2x+1}{x-1} & \text{si } x\in[0,1[\\ f_n(x)=n-1+\sqrt{1-\frac{1}{x}} & \text{si } x\in[1,+\infty[\end{cases}$

On désignera par (C_n) la courbe de f_n dans un repère orthonormé

1-Etudier la continuité de f_2 sur $\mathbb{R}_+$

2-Etudier la dérivabilité de f_2 en 1 à droite et à gauche .Interprétée géométriquement les résultats .Déterminer le domaine de dérivabilité de f_2

3- a -Etudier les variations de f_2 sur $\mathbb{R}_+$

b- Prouver que f_2 est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle J que l'on précisera c- Déduire que l'équation $f_2(x)=0$ a une solution unique notée u_2 dans $\mathbb{R}_+$ et que $0 \prec u_2 \prec \frac{3}{4}$

b- Tracer (C_2) et la courbe (C_2^{-1}) de f_2^{-1}

5-Expliciter pour tout $x \in J$, $f_2^{-1}(x)$; Vérifier que pour tout $x \in [1,2[$, $f_2^{-1}(x) = \frac{1}{1-(x-1)^2}$

II- Soient les fonctions g et u définies sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $u(x)=1+\cos x$ et $g(x)=f_2^{-1}\circ u(x)$. f_2^{-1} définit sur $[1,2[$

1- Vérifier que pour tout $x\in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ $g(x)=1+\ \cot g^2 x$

2-Montrer que g est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ puis montrer que h est une bijection de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle K que l'on déterminera

3-Déterminer le domaine E de dérivabilité de g^{-1} et montrer que $\left(g^{-1}\right)'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x-1}}$

4- Soit la fonction v et h définies sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $v(x)=1+tg^2x$ et $h(x)=g^{-1}\circ v(x)$. Montrer que $h'(x)=-1$; Calculer $h\left(\frac{\pi}{4}\right)$, en déduire h(x)

III-Pour $x\in[0,1[$, on pose $\forall n\geq 2$ $S_n(x)=\left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right)-1$

1-Montrer que $\forall\ x\in[0,1[$ et $\forall n\geq 2$ $S_n(x)=f_n(x)$

2-Prouver que :

$\forall n\geq 2$ l'equation $f_n(x)=0$ a une solution unique notée u_n appartnant a l'intervalle $]0,1[$

3- a - Comparer $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$ et en déduire que $f_{n+1}(u_n)\succ 0$

b- Prouver alors que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est décroissante et qu'elle est convergente

4- a- Montrer que $\forall n\geq 2; 0\leq\ u_n\ \leq\frac{3}{4}$

b- On pose pour tout $n\geq 2$,$v_n=u_n-\frac{1}{2}$; verifier que $0\leq\ v_n\ \ \leq\frac{1}{4}$

c- Montrer que pour tout $n\geq 2$; $(1+2v_n)^{n+1}=2^{n+2}v_n$

d- En déduire que pour tout $n\geq 2$; $0\leq\ v_n\ \ \leq\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$ .Déterminer alors les limites des suites (v_n) et (u_n)

CORRECTION DE LA SERIE ISOMETRIE

EXERCICE N°2

1/ABC étant un triangle équilatéral, A', B' et C' désignent respectivement les milieux de [BC], [AC] et [AB] et O est le centre de gravité de ABC.

Soit φ une isométrie qui laisse globalement invariant le triangle ABC.

Donc $\varphi(\{A,B,C\})=\{A,B,C\}$ et $\varphi(O)=O$.

On distingue six cas :

$\left.\begin{array}{l}\varphi(A)=A\\ \varphi(B)=B\\ \varphi(C)=C\end{array}\right\} \Leftrightarrow \varphi = Id_P$. $\quad$ $\left.\begin{array}{l}\varphi(A)=A\\ \varphi(B)=C\\ \varphi(C)=B\\ \varphi(O)=O\end{array}\right\} \Leftrightarrow \varphi = S_{(OA)}$. $\quad$ $\left.\begin{array}{l}\varphi(A)=B\\ \varphi(B)=A\\ \varphi(C)=C\\ \varphi(O)=O\end{array}\right\} \Leftrightarrow \varphi = S_{(OC)}$.

$\left.\begin{array}{l}\varphi(A)=C\\ \varphi(B)=B\\ \varphi(C)=A\\ \varphi(O)=O\end{array}\right\} \Leftrightarrow \varphi = S_{(OB)}$. $\quad$ $\left.\begin{array}{l}\varphi(A)=B\\ \varphi(B)=C\\ \varphi(C)=A\\ \varphi(O)=O\end{array}\right\} \Leftrightarrow \varphi = R_{\left(O;\frac{2\pi}{3}\right)}$ et $\left.\begin{array}{l}\varphi(A)=C\\ \varphi(B)=A\\ \varphi(C)=B\\ \varphi(O)=O\end{array}\right\} \Leftrightarrow \varphi = R_{\left(O;-\frac{2\pi}{3}\right)}$

2/Soit R la rotation de centre A et d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{3}$.

$\left.\begin{array}{l}R(A)=A\\ R(B)=C\\ R(C)=D\end{array}\right\} \Rightarrow$ R est un déplacement qui transforme ABC en ACD.

3/Soit f un déplacement qui transforme ABC en ACD.

Or R^{-1} est un déplacement qui transforme ACD en ABC; donc $R^{-1}of$ est un déplacement qui laisse globalement invariant ABC.

Donc on a $R^{-1}of = Id_P$ ou $R^{-1}of = R_{\left(O;\frac{2\pi}{3}\right)}$ ou $R^{-1}of = R_{\left(O;\frac{-2\pi}{3}\right)}$.

D'où $f = R$ ou $f = RoR_{\left(O;\frac{2\pi}{3}\right)}$ ou $f = RoR_{\left(O;\frac{-2\pi}{3}\right)}$.

Si $f = RoR_{\left(O;\frac{2\pi}{3}\right)}$ et comme $\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3} \equiv \pi\ [2\pi]$;alors f est une symétrie centrale.

f(A)= $RoR_{\left(O;\frac{2\pi}{3}\right)}(A) = R(B) = C$.

Donc f est la symétrie centrale $S_{B'}$ de centre B',milieu de [AC].

$S_{B'}(A)=C$; $S_{B'}(B)=D$ et $S_{B'}(C)=A$; donc $S_{B'}$ transforme ABC en ACD.

Si $f = RoR_{\left(O;\frac{-2\pi}{3}\right)}$ et comme $\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{3} \equiv \frac{-\pi}{3}\ [2\pi]$; alors f est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$

$R_{\left(C;\frac{-\pi}{3}\right)}(A)=D$ et $R_{\left(C;\frac{-\pi}{3}\right)}(B)=A$; donc $R_{\left(C;\frac{-\pi}{3}\right)}$ transforme ABC en ACD.

Ainsi les seuls déplacements qui transforment ABC en ACD sont R; $S_{B'}$ et $R_{\left(C;\frac{-\pi}{3}\right)}$.

4/Soit g un anti-déplacement qui transforme ABC en ACD.

Alors $R^{-1}og$ est un anti-déplacement qui laisse globalement invariant ABC.

Donc on a $R^{-1}og = S_{(OA)}$ ou $R^{-1}og = S_{(OB)}$ ou $R^{-1}og = S_{(OC)}$.

D'où $g = R\,oS_{(OA)}$ ou $g = R\,oS_{(OB)}$ ou $g = R\,oS_{(OC)}$.

Si $g = R\,oS_{(OA)}$, alors g(A)=R(A)=A, g(B)=R(C)=D et g(C)=R(B)=C.Donc $g = S_{(AC)}$

Si $g = R\,oS_{(OB)}$, alors g(A)=R(C)=D, g(B)=R(B)=C et g(C)=R(A)=A.

Donc g est un anti-déplacement tel que gog est non identique, car gog(C)=g(A)=D.

Donc g est une symétrie glissante d'axe Δ et de vecteur $\vec{u}$.

$$gog(C) = t_{2\vec{u}}(C) = D \Leftrightarrow \vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'}.$$

g(B)=C et g(C)=A alors les points A' et B' ; milieux respectifs de [BC] et [AC] sont des points de Δ, donc Δ=(A'B').

Ainsi $g = t_{\overrightarrow{A'B'}}\,oS_{(A'B')} = S_{(A'B')}\,ot_{\overrightarrow{A'B'}}$.

Si $g = R\,oS_{(OC)}$, alors g(A)=R(B)=C, g(B)=R(A)=A et g(C)=R(C)=D.

Donc g est un anti-déplacement tel que gog est non identique, car gog(B)=g(A)=C.

Donc g est une symétrie glissante d'axe Δ' et de vecteur $\vec{v}$.

$$gog(B) = t_{2\vec{v}}(B) = C \Leftrightarrow \vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{C'B'}.$$

g(A)=C et g(B)=A alors les points B' et C' ; milieux respectifs de [AC] et [AB] sont des points de Δ', donc Δ'=(B'C').

Ainsi $g = t_{\overrightarrow{C'B'}}\,oS_{(C'B')} = S_{(C'B')}\,ot_{\overrightarrow{C'B'}}$

En conclusion ; les seuls anti-déplacements qui transforment ABC en ACD sont :
$S_{(AC)}$; $t_{\overrightarrow{A'B'}}\,oS_{(A'B')}$ et $t_{\overrightarrow{C'B'}}\,oS_{(C'B')}$.

EXERCICE N°3:

1/a)f est une isométrie du plan; alors $f([AB]) = [f(A)f(B)]$.

$$f([AB]) = [AB] \Rightarrow \begin{cases} f(A) = A \\ f(B) = B \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} f(A) = B \\ f(B) = A \end{cases} \Rightarrow f\,of(A) = A \text{ et } f\,of(B) = B.$$

fof est un déplacement qui fixe deux points distincts; donc $f\,of = Id_P$.

b) $f\,of = Id_P \Rightarrow f = Id_P$ ou $f = S_I$ ou $f = S_{(AB)}$ ou $f = S_\Delta$; où I est le milieu de [AB] et Δest la médiatrice de [AB].

Réciproquement , Id_P ; S_I ; $S_{(AB)}$ et S_Δ transforment [AB] en [AB].

Donc les isométries qui laisse globalement invariant [AB] sont Id_P ; S_I ; $S_{(AB)}$ et S_Δ .

2/a)R=R'.

f est une isométrie qui laisse globalement invariant $(C)\cup(C') \Leftrightarrow f([OO']) = [OO']$.

Donc $f = Id_P$ ou $f = S_K$ ou $f = S_{(OO')}$ ou $f = S_{(D)}$; où K est le milieu de [OO'] et (D) est la médiatrice de [OO'].

b)$R \neq R'$

$f((C)\cup(C')) = (C)\cup(C') \Leftrightarrow f(O) = O$ et $f(O') = O' \Leftrightarrow f = Id_P$ ou $f = S_{(OO')}$

CORRIGE EX N°1:

I/

1)a)La fonction $x \to tg(x)$ est dérivable et strictement croissante sur $\Re / \{\frac{\pi}{2}+k\pi , k\in Z\}$,puisque $tg'(x) = 1+ tg^2(x)$.

Par suite lorsque $x \in]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ on a $x > -\frac{\pi}{4} \Rightarrow tg(x) > tg(-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow tg(x) > -1$

$\Rightarrow \quad tg(x)+1>0$.

Il s'en suit alors que la fonction $f(x) = \sqrt{1+tg(x)}$ est dérivable sur $]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ et

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+tg^2(x))(1+tg(x))^{-1/2} = \frac{1+tg^2(x)}{2\sqrt{1+tg(x)}} .$$

b) $\lim\limits_{x\to(-\frac{\pi}{4})^+} \frac{f(x)-f(-\frac{\pi}{4})}{x+\frac{\pi}{4}} = \lim\limits_{x\to(-\frac{\pi}{4})^+} \frac{\sqrt{1+tg(x)}}{x+\frac{\pi}{4}}$ $(f(-\frac{\pi}{4})=0)$.

$$= \lim_{x\to(-\frac{\pi}{4})^+} \sqrt{\frac{1+tg(x)}{x+\frac{\pi}{4}}}\ \frac{1}{\sqrt{x+\frac{\pi}{4}}}$$

Or $\lim\limits_{x\to(-\frac{\pi}{4})^+} \frac{1+tg(x)}{x+\frac{\pi}{4}} = \lim\limits_{x\to(-\frac{\pi}{4})^+} \frac{tg(x)-tg(-\frac{\pi}{4})}{x-(-\frac{\pi}{4})}$:c'est le nombre dérivé de la fonction tg en $-\frac{\pi}{4}$

Donc $\lim\limits_{x\to(-\frac{\pi}{4})^+} \frac{1+tg(x)}{x+\frac{\pi}{4}} = 1+tg^2(-\frac{\pi}{4}) = 2$

D'autre part on a : $\lim\limits_{x\to(-\frac{\pi}{4})^+} \frac{1}{\sqrt{x+\frac{\pi}{4}}} = 1/0^+ = +\infty$

On obtient ,enfin, $\lim\limits_{x\to(-\frac{\pi}{4})^+} \frac{f(x)-f(-\frac{\pi}{4})}{x+\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}(+\infty) = +\infty$ .Ce qui ne permet pas à f d'être dérivable à droite en $-\frac{\pi}{4}$ .De plus la courbe C_f de f aura au point $(-\frac{\pi}{4},0)$ une demi tangente verticale dirigée vers le haut .

c)$\forall x\in]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[, f'(x) = \frac{1+tg^2(x)}{2\sqrt{1+tg(x)}} > 0$, donc f est strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$

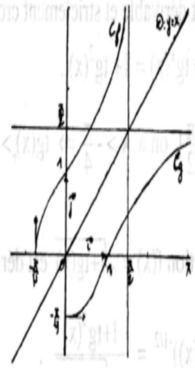
$\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} f(x) = \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \sqrt{1+tg(x)}$

Or $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} tg(x) = \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \frac{sinx}{cosx} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

Par suite $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} f(x) = +\infty$.

d)$f(0) = 1$,donc C_f coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées (0,1)

La droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est une asymptote pour C_f , courbe dont l'allure est :



(C_f est réduite à 50%)

2)a)D'après le tableau de variations de f , on constate que cette fonction est strictement croissante et continue de $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ dans l'intervalle $I = [0,+\infty[$, il en résulte que f est une bijection de $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ dans $[0,+\infty[$.

b) * $x\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ et $g(0) = x \Leftrightarrow x\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ et $f(x) = 0 \Leftrightarrow x\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ et $\sqrt{1+tg(x)} = 0$

$\Leftrightarrow x\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ et $tg(x) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4}$

Donc $g(0) = -\frac{\pi}{4}$.

* $x\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ et $g(1) = x \Leftrightarrow x\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ et $f(x) = 1 \Leftrightarrow x\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ et $\sqrt{1+tg(x)} = 1$

$\Leftrightarrow x\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ et $tg(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Donc $g(1) = 0$.

* $x\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ et $g(\sqrt{2}) = x \Leftrightarrow x\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ et $f(x) = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow x\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ et $\sqrt{1+tg(x)} = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow x\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ et $tg(x) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$

Donc $g(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$.

c)On a $C_g = S_D(C_f)$ où D est la droite d'équation : $y = x$.

Remarquons aussi que :

* $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} f(x) = +\infty$ donne $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \frac{\pi}{2}$, par suite la droite d'équation $y = \frac{\pi}{2}$ est une asymptote pour C_g au voisinage de $+\infty$.

* C_f admet au point $(-\frac{\pi}{4},0)$ une demi tangente verticale dirigée vers le haut , donc

... et au point $(0,-\frac{\pi}{4})$ une demi tangente horizontale di...

... es ordonnées au point de coordonnées (0,1) , pa...

f' ne s'annule pas sur $]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ donc g est dérivable sur $f(\,]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[\,)$ c'est à dire sur $]0,+\infty[$, de plus $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$.

D'autre part C_g admet au point $(0, -\frac{\pi}{4})$ une tangente horizontale donc g est dérivable à droite en 0 et $g'_d(0) = 0$.

<u>Remarque :</u>

Soit f une fonction bijective d'un intervalle I dans un autre J. On note f^{-1} sa bijection réciproque. Trois cas sont possibles :

**) <u>Si</u> f est dérivable en un point x_0 de I est $f'(x_0) \neq 0$, <u>alors</u> f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$. Par conséquent <u>si</u> f est dérivable sur une partie E de I et $\forall x\in E$ $f'(x) \neq 0$ <u>alors</u> f^{-1} est dérivable sur f(E) et $\forall x\in f(E)$, $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.*

Ceci est un résultat du cours.

**) <u>Si</u> f est dérivable en un point x_0 de I est $f'(x_0) = 0$, <u>alors</u> f^{-1} n'est pas dérivable en $f(x_0)$. L'élève <u>doit</u> justifier cette conclusion graphiquement en écrivant :*

$f'(x_0) = 0 \Rightarrow C_f$ (courbe de f) admet au point $(x_0, f(x_0))$ une tangente horizontale $\Rightarrow$ C_g (courbe de g) admet au point $(f(x_0), x_0)$ une tangente verticale $\Rightarrow$ g n'est pas dérivable en $f(x_0)$.

**) <u>Si</u> f n'est pas dérivable en un point x_0 de I et $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\pm\infty$ (la limite en x_0 peut être à droite ou à gauche), <u>alors</u> f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et $(f^{-1})'(f(x_0)) = 0$. L'élève <u>doit</u> justifier cette conclusion graphiquement en écrivant :*

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\pm\infty$ $\Rightarrow C_f$ admet au point $(x_0, f(x_0))$ une tangente verticale (si x tend vers x_0^+ ou vers x_0^- on aura une demi tangente verticale)$\Rightarrow$ C_g (courbe de g) admet au point $(f(x_0), x_0)$ une tangente(ou demi tangente) horizontale $\Rightarrow$ g est dérivable en $f(x_0)$ et $(f^{-1})'(f(x_0)) = 0$.

Cherchons l'expression de $g'(x)$ pour $x \in]0,+\infty[$.

$$\forall x>0 ;\ g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{2\sqrt{1+tg(g(x))}}{1+tg^2(g(x))}$$

Or pour $x \geq 0$ on a : $f(g(x)) = \sqrt{1+tg(g(x))} = x$ ce qui donne $tg(g(x)) = x^2-1$.

Par suite $\forall x>0$, on a : $g'(x) = \frac{2\sqrt{1+x^2-1}}{1+\left(x^2-1\right)^2} = \frac{2x}{x^4-2x^2+2}$.

On remarque aussi que $\frac{2(0)}{0^4-2(0)^2+2}=0 = g'(0)$. On conclut alors que :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ g'(x) = \frac{2x}{x^4-2x^2+2}.$$

4)a)Comme f, g est strictement croissante ...

$$\Rightarrow (2n-n+1)g(n) \leq \sum_{k=n}^{2n} g(k) \leq (2n-n+1)g(2n)$$

$$\Rightarrow (n+1)g(n) \leq \sum_{k=n}^{2n} g(k) \leq (n+1)g(2n)$$

$$\Rightarrow g(n) \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} g(k) \leq g(2n)$$

$$\Rightarrow \quad g(n) \leq U_n \leq g(2n)$$

b) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} g(n) = \lim\limits_{n\to+\infty} g(2n) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

D'autre part $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} f(x) = +\infty$ donne $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \frac{\pi}{2}$ (puisque $g = f^{-1}$).

Donc, à fortiori, $(U_n)_{n\in N}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \frac{\pi}{2}$.

CORRIGE EX N°2:

1)a)La fonction $x \to 2x - x^2$ est manifestement dérivable et strictement positive sur $]1,2[$,donc la fonction $x \to \sqrt{2x-x^2}$ est dérivable sur $]1,2[$.

En plus de ça la fonction $x \to x-1$ est dérivable et non nulle sur $]1,2[$

Il en résulte que f est dérivable sur $]1,2[$ en tant que quotient de telles fonctions et

$$f'(x) = \frac{\frac{\frac{1}{2}(2-2x)}{\sqrt{2x-x^2}}(x-1)-\sqrt{2x-x^2}}{(x-1)^2} = \frac{\frac{(1-x)(x-1)}{\sqrt{2x-x^2}}-\sqrt{2x-x^2}}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1)^2-(2x-x^2)}{(x-1)^2\sqrt{2x-x^2}}$$

$$= \frac{-1}{(x-1)^2\sqrt{2x-x^2}}.$$

b) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{f(x)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{2x-x^2}}{(x-1)(x-2)} = 0/0$: une forme indéterminée .

Cependant , on peut écrire : $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{x(2-x)}}{(x-1)(x-2)}$

$= \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{-\sqrt{x}}{x-1}\sqrt{\frac{2-x}{(x-2)^2}}$ (à gauche de 2 on a : $x-2<0$)

$= \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{-\sqrt{x}}{x-1}\sqrt{\frac{1}{2-x}} = \frac{-\sqrt{2}}{2-1}\sqrt{\frac{1}{0^+}} = -\infty$.

Donc f n'est pas dérivable à gauche en 2 et le fait que $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = -\infty$ prouve que la courbe C_f de f admet au point (2,0) une demi tangente verticale dirigée vers le haut

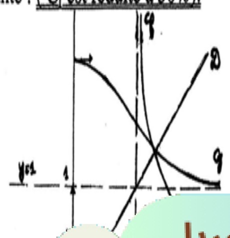
c)$\forall x \in]1,2[$, $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2\sqrt{2x-x^2}} < 0$; donc f est strictement décroissante sur $]1,2]$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{2x-x^2}}{x-1} = 1/0^+ = +\infty$; $f(2) = 0$;les variations de f se résument donc dans le tableau suivant :

x	1		2
f	$+\infty$	$\searrow$	0

La droite d'équation $x = 1$ est une asymptote pour C_f ; puisque $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

L'allure de C_f sera donc , la suivante : (C_f est réduite à 50%).



**Il faut ,toutefois , attirer l'attention de l'élève au fait que la négligence de l'unité de longueur imposée peut diminuer la note attribuée à la construction de la courbe .*

2)a)$\forall x \in]1,2]$, on pose $u(x) = f(x) - x$.

Il est évident que u est dérivable sur $]1,2]$ et que $u'(x) = f'(x) - 1$.

$\forall x \in]1,2]$, $u'(x) < 0$ puisque $f'(x) \leq 0$.

On en tire que u est continue et strictement décroissante sur $]1,2]$,elle réalise ainsi une bijection de cet intervalle dans $u(]1,2]) = [u(2) , \lim\limits_{x\to 1^+} u(x) [$.

Mais $u(2) = f(2) - 2 = -2$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} u(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (f(x) - x) = +\infty - 1 = +\infty$

$\Rightarrow$ u est une bijection de $]1,2]$ dans $[-2 , +\infty[$.

0 est un réel de $[-2 , +\infty[$; il admet alors ,par u , un antécédent unique α dans $]1,2]$

Ce qui veut dire qu'il existe un seul réel α dans $]1,2]$ tel que $u(\alpha) = 0$ ou plus exactement tel que $f(\alpha) = \alpha$.

b)$u(\frac{3}{2}) = f(\frac{3}{2}) - \frac{3}{2} = \sqrt{3} - \frac{3}{2} > 0$; $u(2) = -2 < 0$; $u(\alpha) = 0$ et u est continue sur $[\frac{3}{2},2]$ .Ce qui montre ,grâce au théorème des valeurs intermédiaires , que $\alpha \in]\frac{3}{2},2[$.

3)a)D'après le tableau de variations de f ,on constate que cette fonction est continue et strictement décroissante de l'intervalle $]1,2]$ dans $[0,+\infty[$. f réalise ,alors, une bijection de $]1,2]$ dans $I= [0,+\infty[$.

b)On sait que $C_g = S_D(C_f)$, D étant la droite d'équation : $x = y$.

*C_f admet au point (2,0) une demi tangente verticale dirigée vers le haut ($y \geq 0$) donc C_g admet au point (0,2) une demi tangente horizontale dirigée vers la droite($x \geq 0$) .

*La droite d'équation $y = 1$ est une asymptote pour C_g ,puisque la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote pour C_f .

L'allure de C_g est indiquée dans la même figure de C_f .

c)Pour trouver g(x) en fonction de x ,il suffit de résoudre l'équation (E) : $f(x) = y$ où x est l'inconnu dans $]1,2]$ et y un paramètre de $[0,+\infty[$.

(E) $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2x-x^2}}{x-1} = y$, or $y \geq 0$ et $\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$ est définie et positive pour $x \in]1,2]$.

Par suite (E) $\Leftrightarrow \frac{2x-x^2}{(x-1)^2} = y^2 \Leftrightarrow 2x - x^2 = y^2x^2 - 2xy^2 + y^2$

$$\Leftrightarrow x^2(-1-y^2) + 2x(1+y^2) - y^2 = 0 .$$

C'est une équation du second degrés dont le discriminant réduit est

$$\Delta' = ((1+y)^2)^2 - (-1-y^2)(-y^2) = 1+y^4+2y^2-y^2-y^4 = 1+y^2 > 0 .$$

On en tire que $x = \frac{-1-y^2-\sqrt{1+y^2}}{-1-y^2} = \frac{1+y^2+\sqrt{1+y^2}}{1+y^2} = 1+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$

ou $x = \frac{-1-y^2+\sqrt{1+y^2}}{-1-y^2} = \frac{1+y^2-\sqrt{1+y^2}}{1+y^2} = 1-\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$

< 1 ,donc $x = 1+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} = f^{-1}(y) = g($

CORRIGE EX N°4:

A/

1)a) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{-1+\sqrt{1+x^2}}{x} = 0/0$, une forme indéterminée , cependant on a

$f(x) = \frac{-1+\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{(-1+\sqrt{1+x^2})(1+\sqrt{1+x^2})}{x(1+\sqrt{1+x^2})} = \frac{x^2}{x(\sqrt{1+x^2}+1)} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$ par suite

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} = 0/2 = 0 = f(0)$.

Donc f est continue en 0 .

b) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{1}{2}$

On déduit que f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = \frac{1}{2}$.

2)a)T : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$, or $f'(0) = \frac{1}{2}$ et $f(0) = 0$ donc T : $y = \frac{1}{2}x$

On a déjà remarqué dans la question précédente que $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$ donc

$f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} - \frac{1}{2}x = \frac{2x - x(\sqrt{1+x^2}+1)}{2(\sqrt{1+x^2}+1)} = \frac{2x - x\sqrt{1+x^2} - x}{2(\sqrt{1+x^2}+1)} = \frac{x(1-\sqrt{1+x^2})}{2(\sqrt{1+x^2}+1)}$

Mais pour $x \geq 0$ on a $1+x^2 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{1+x^2} \geq 1 \Rightarrow 1-\sqrt{1+x^2} \leq 0$

$\Rightarrow f(x) - \frac{1}{2}x \leq 0$.

On en tire alors que C est située au dessous de T .

b)$\forall x \in \Re_+$, on a $1+x^2 > 0$ donc la fonction $x \to \sqrt{1+x^2}$ est dérivable sur $\Re_+$ .Il s'en suit que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que

$f'(x) = \frac{(\frac{1}{2}2x\frac{1}{\sqrt{1+x^2}})x - (-1+\sqrt{1+x^2})}{x^2} = \frac{\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} + 1 - \sqrt{1+x^2}}{x^2} = \frac{x^2 + \sqrt{1+x^2} - (1+x^2)}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

$= \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$. Le signe de f' sur $]0,+\infty[$ est celui de $\sqrt{1+x^2} - 1$, mais on a déjà établit dans la question précédente que sur $]0,+\infty[$, $\sqrt{1+x^2} - 1 \geq 0$

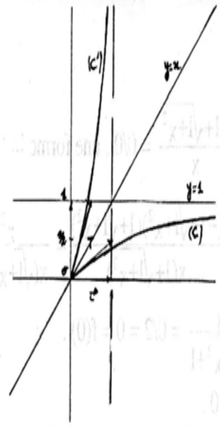
On conclut ,alors, que f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1+\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{-1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}) = \lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{-1}{x} + \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}) = 1$

Les variations de f se résument dans le tableau suivant :

x	0		+∞
f'(x)	$\frac{1}{2}$	+	
f	0	↗	1

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ donc la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote pour C au voisinage de $+\infty$ .L'allure de C est indiquée dans la figure suivante :(C est réduite à 50%)



3)a)D'après le tableau de variations de f ,on constate qu'elle est continue et strictement croissante de $[0,+\infty[$ dans $[0,1[$ .Il en résulte que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ dans l'intervalle $I = [0,1[$.

b)$\forall x \in \Re^*_+$ et $\forall y \in]0,1[$, $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{-1+\sqrt{1+x^2}}{x} = y \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} = xy + 1$

$\Leftrightarrow 1 + x^2 = (xy+1)^2 \quad \Leftrightarrow 1 + x^2 = x^2y^2 + 2xy + 1$

$\Leftrightarrow x = xy^2 + 2y$ (on a divisé par x qui est $\neq 0$)

$\Leftrightarrow x = \frac{2y}{1-y^2}$ $\quad (1-y^2 \neq 0$ car $y \neq 1)$

En changeant la notation ,on obtient $\forall x \in]0,1[$, $f^{-1}(x) = \frac{2x}{1-x^2}$.

Ajoutons que $f(0) = 0$ donne $f^{-1}(0) = 0$ .On peut affirmer ,alors, que :

$\forall x \in [0,1[$, $f^{-1}(x) = \frac{2x}{1-x^2}$.

c)$C' = S_D(C)$, D est la droite d'équation $x = y$.

En particulier la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote pour C' ,courbe dont l'allure est indiquée dans la figure ci-dessus .

B/

1)La fonction $x \to$ cotgx est définie et dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ et $cotg'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} < 0$

$\Rightarrow$ La fonction $x \to$ cotgx est strictement décroissante sur $]0,\frac{\pi}{2}]$, il en découle alors que si $x \in]0,\frac{\pi}{2}]$, cotgx $\in [cotg\frac{\pi}{2} , \lim\limits_{x\to0^+} cotgx[$.

Or $cotg\frac{\pi}{2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} cotgx = +\infty$ .Donc $\forall x \in]0,\frac{\pi}{2}]$, cotgx $\in [0,+\infty[$ ce qui justifie l'existence de f(cotgx) pour $x \in]0,\frac{\pi}{2}]$ et par conséquent la définition de h sur cet intervalle .

2) $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{h(x)-h(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{f(cotgx)-f(cotg\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}}$

$= \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{f(cotgx)-f(cotg\frac{\pi}{2})}{cotgx-cotg\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{cotgx-cotg\frac{\pi}{2}}{x-\frac{\pi}{2}}$

$\dots g\frac{\pi}{2} = 0$,donc

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{f(\text{cotg}x)-f(\text{cotg}\frac{\pi}{2})}{\text{cotg}x-\text{cotg}\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(X)-f(0)}{X-0} \qquad (X=\text{cotg}x)$$

$$= f'(0) = \frac{1}{2}.$$

D'autre part $\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{\text{cotg}x-\text{cotg}\frac{\pi}{2}}{x-\frac{\pi}{2}} = \text{cotg}'(\frac{\pi}{2})$: nombre dérivé de la fonction cotg en $\frac{\pi}{2}$

$$= \frac{-1}{\sin^2(\frac{\pi}{2})} = -1.$$

On obtient alors $\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{h(x)-h(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}} = (\frac{1}{2})(-1) = -\frac{1}{2}$ .Ceci montre que h est dérivable à gauche en $\frac{\pi}{2}$ et que $h'_g(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}$.

3) $\forall x\in]0,\frac{\pi}{2}[$, $h(x) = f(\text{cotg}x) = \frac{-1+\sqrt{1+\text{cotg}^2x}}{\text{cotg}x}$, or $1+\text{cotg}^2x = \frac{1}{\sin^2x}$

et $\text{cotg}x = \frac{\cos x}{\sin x}$; on aura alors : $h(x) = \dfrac{-1+\boxed{\frac{1}{\sin x}}}{\frac{\cos x}{\sin x}}$

$$= \frac{-1+\frac{1}{\sin x}}{\frac{\cos x}{\sin x}} \quad (\text{ pour } x\in]0,\frac{\pi}{2}[,\sin x>0)$$

$$= \frac{1-\sin x}{\cos x}.$$

4) $\forall x\in]0,\frac{\pi}{2}[$, $h(x) = \frac{1-\sin x}{\cos x}$, donc h est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ en tant que rapport de deux fonctions dérivables et $h'(x) = \frac{-\cos x\cos x-(-\sin x)(1-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{-\cos^2x+\sin x-\sin^2x}{\cos^2x} = \frac{-1+\sin x}{\cos^2x} < 0$ ($\sin x < 1$, pour $x\in]0,\frac{\pi}{2}[$)

$\Rightarrow$ h est strictement décroissante sur $]0,\frac{\pi}{2}]$.

h est de plus continue sur $]0,\frac{\pi}{2}]$,elle réalise alors une bijection de cet intervalle dans $h(]0,\frac{\pi}{2}])$.

$h(]0,\frac{\pi}{2}]) = [\, h(\frac{\pi}{2}), \lim_{x\to 0^+} h(x)[$. Or $\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} f(\text{cotg}x)$

$= \lim_{X\to+\infty} f(X)$ ($X = \text{cotg}x$ tend vers $+\infty$

$= 1$ quand x tend vers 0^+)

et $h(\frac{\pi}{2}) = f(\text{cotg}\frac{\pi}{2}) = f(0) = 0$

On en tire que $h(]0,\frac{\pi}{2}]) = [0,1[= I$.

$\Rightarrow$ h est une bijection de $]0,\frac{\pi}{2}]$ dans I.

5)On sait que h est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ et que $\forall x\in]0,\frac{\pi}{2}[$, $h'(x) = \frac{-1+\sin x}{\cos^2x} \neq 0$

A gauche en $\frac{\pi}{2}$, on a $h'_g(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2} \neq 0$.

$\Rightarrow$ h est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ et h' ne s'annule pas

$\Rightarrow h^{-1}$ est dérivable sur $h(]0,\frac{\pi}{2}]) = I$ et $(h^{-1})'(x) = \frac{1}{h'(h^{-1}(x))}$

Pour $x = 0$, $(h^{-1})'(0) = \frac{1}{h'(h^{-1}(0))} = \frac{1}{h'(\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\frac{-1}{2}} = -2$.

Pour $x \in]0,1[$, $(h^{-1})'(x) = \frac{1}{h'(h^{-1}(x))} = \frac{\cos^2(h^{-1}(x))}{-1+\sin(h^{-1}(x))}$

Mais $x \in]0,1[\Rightarrow h^{-1}(x) \in]0,\frac{\pi}{2}[\;\Rightarrow h(h^{-1}(x)) = \frac{1-\sin(h^{-1}(x))}{\cos(h^{-1}(x))} = x$

$$\Rightarrow -1+\sin(h^{-1}(x)) = -x.\cos(h^{-1}(x))$$

$$\Rightarrow (h^{-1})'(x) = -\frac{\cos(h^{-1}(x))}{x} \quad (*)$$

D'autre part $h^{-1}(x) \in]0,\frac{\pi}{2}[$ et $\frac{1-\sin(h^{-1}(x))}{\cos(h^{-1}(x))} = x$ donne

$$\frac{1-\sqrt{1-\cos^2(h^{-1}(x))}}{\cos(h^{-1}(x))} = x \Rightarrow \sqrt{1-\cos^2(h^{-1}(x))} = 1 - x.\cos(h^{-1}(x))$$

$$\Rightarrow 1-\cos^2(h^{-1}(x)) = 1+x^2\cos^2(h^{-1}(x)) - 2x\cos(h^{-1}(x))$$

$$\Rightarrow \cos(h^{-1}(x)).(x^2+1) = 2x \qquad (\cos(h^{-1}(x)) \neq 0)$$

$$\Rightarrow \cos(h^{-1}(x)) = \frac{2x}{x^2+1} \quad (**)$$

(*) et (**) donnent $\forall x\in]0,1[$, $(h^{-1})'(x) = \frac{-2}{x^2+1}$; cette égalité est vraie aussi pour $x = 0$

On conclut alors, que $\forall x\in [0,1[$, $(h^{-1})'(x) = \frac{-2}{x^2+1}$.