AXLOU TOTH
POUR L'INNOVATION

Suites Numériques
Mr Diallo

Terminale S1
August 17, 2021

Exercice 1:

1 Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{4U_n}{U_n+1} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $0 < U_n < 3$

(b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

(c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

2 Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \dfrac{U_n - 3}{U_n}$

(a) Montrer que la suite (V_n) est géométrique.

(b) Exprimer (V_n) puis (U_n) en fonction de n.

(c) Retrouver alors la limite de la suite (U_n).

3 Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = \dfrac{3}{U_n}$ et on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} W_k$.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $W_n = 1 - V_n$.

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $S_n = n + 1 + \dfrac{8}{3}\left(1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$.

(c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{S_n}{n}$.

Exercice 2:

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{3U_n + 4} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1 (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq U_n \leq 4$.

(b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

(c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

2 (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $4 - U_{n+1} \leq \dfrac{3}{4}(4 - U_n)$. (On pourra commencer par exprimer $4 - U_{n+1}$ en fonction de $4 - U_n$)

(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $4 - U_n \leq 4 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$

(c) Retrouver alors la limite de la suite (U_n).

3 On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$.

(a) Montrer que la suite (S_n) est croissante.

(b) Montrer par l'absurde que la suite (S_n) n'est pas majorée.

(c) Déterminer alors la limite de la suite (S_n).

4 (a) Montrer que $\mathbb{N}^*$, on a : $S_n \geq 4n - 12\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$.

(On pourra utiliser le résultat de la question 2) b))

(b) Retrouver alors la limite de la suite (S_n).

Exercice 3 :

Soit la suite réelle U définie par : $\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{3U_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

1 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq U_n \leq 3$

2 Montrer que la suite U est croissante.

3 En déduire que la suite U est convergente et calculer sa limite.

Exercice 4 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes positifs, telle que $u_0 = 5$ et vérifiant pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}$.

1 Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 4$

2 On se propose, dans cette question, d'étudier de deux manières la convergence de cette suite.

- **Première Méthode**
  - (a) Montre que la suite est décroissante.
  - (b) Déduire de ce qui précède que la suite est convergente, puis trouve sa limite.
- **Deuxième Méthode**
  - (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - 4 \leq \frac{1}{4}(u_n - 4)$
  - (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n - 4 \leq \frac{1}{4^n}$
  - (c) En déduire que la suite converge et trouve sa limite.

Exercice 5 :

Soit la suite réelle U définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{2U_n}{1 + (U_n)^2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1 (a) Étudier le sens de variation sur de la fonction : $x \mapsto \frac{2x}{1 + x^2}$.

(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$

(c) Montrer que la suite U est convergente.

d) Déterminer la limite de la suite U.

2 Soient les suites V et S définies sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = 1 - U_n$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} V_k$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq V_{n+1} \leq \frac{2}{5} V_n$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq V_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq S_n \leq \frac{5}{6}\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right]$

d) Déterminer alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}$.

Exercice 6 :

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = \frac{3}{2}$ et $U_{n+1} = \frac{U_n}{\sqrt{1 + U_n}}$; $n \in \mathbb{N}$.

1 a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$.

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

2 Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_0 = 1$ et $V_{n+1} = \frac{V_n}{U_n}$; $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout $n \geq 1$: $V_{n+1} \geq \frac{\sqrt{10}}{3} V_n$.

b) En déduire par récurrence que pour tout $n \geq 1$: $V_n \geq \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{n-1}$ puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$

3 Soit la suite (S_n) définie par : $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{V_k^2}$; $n \geq 1$

a) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{V_k^2} \leq \frac{45}{2}\left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n\right)$

b) En déduire que la suite (S_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

Exercice 7 :

Soient les suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$U_0 = 0 ;\ V_0 = 1 ,\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{on a :} \quad U_{n+1} = \frac{2U_n + V_n}{3} \quad \text{et} \quad V_{n+1} = \frac{3U_n + 2V_n}{5}$$

1 Calculer U_1 et V_1

2 Montrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n \leq V_n$

3 Montrer que la suite (U_n) est croissante et que la suite (V_n) est décroissante.

4 Montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont convergentes et qu'elles admettent la même limite.

5 Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = 9U_n + 5V_n$

a Montrer que (W_n) est une suite constante.

b En déduire la valeur de la limite commune des suites (U_n) et (V_n).

Exercice 8 :

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_{n+1} = \sqrt{\dfrac{U_n + 1}{2}}$

1 Dans cette question on suppose que $U_0 = \cos x$ où $x \in \left]0\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right[$

a Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n = \cos\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$

b En déduire la limite de la suite (U_n).

2 Dans cette question on suppose que $U_0 \in]0\,,\,1[$

a Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $0 < U_n < 1$

b Montrer que la suite (U_n) est monotone.

c En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 9 :

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $U_{n+1} = \dfrac{3U_n - 1}{2U_n}$

1 a Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n \geq 1$

b Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

2 Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \dfrac{2U_n - 2}{2U_n - 1}$

a Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$

b Exprimer (V_n) puis (U_n) en fonction de n

c Retrouver la limite de la suite (U_n).

3 a Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $U_{n+1} - 1 \leq \dfrac{1}{2}(U_n - 1)$

b Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n - 1 \leq \dfrac{1}{2^n}$

c Retrouver alors la limite de la suite (U_n).

Exercice 10 :

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_1 = 1$, $U_2 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $U_{n+2} = 6U_{n+1} - 8U_n$

Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $W_n = \dfrac{U_{n+1}}{U_n}$

1.
   a. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $W_{n+1} = 6 - \dfrac{8}{W_n}$
   b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $2 < W_n < 4$
   c. Montrer que la suite W est croissante
   d. Montrer que la suite W est convergente et déterminer sa limite.
2. Soit la suite réelle t définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $t_n = \dfrac{W_n - 4}{W_n - 2}$
   a. Montrer que t est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$
   b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $W_n = \dfrac{2(1+2^n)}{1+2^{n-1}}$
   c. En déduire que $U_n = 2^{n-2}(1+2^{n-1})$
   d. Déterminer la limite de la suite U.

Exercice 11 :

Soit la suite réelle U définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + \dfrac{2}{U_n} \end{cases}$

1. Montrer que pour tout entier naturel n on a : $U_n \geq 1$.
2. Montrer que la suite U est croissante.
3. Montrer que la suite U diverge vers $+\infty$.
4.
   a. Montrer que pour tout entier naturel n on a : $4 \leq U_{n+1}^2 - U_n^2 \leq 4 + 2(U_{n+1} - U_n)$
   b. En déduire que pour tout entier naturel n on a : $4n \leq U_n^2 - 1 \leq 4n + 2U_n - 2$
   c. Montrer alors que pour tout entier naturel n on a : $1 - \dfrac{2}{U_n} + \dfrac{1}{U_n^2} \leq \dfrac{4n}{U_n^2} \leq 1 - \dfrac{1}{U_n^2}$
   d. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2\sqrt{n}}{U_n}\right)$

Exercice 11 bis :

Soit la suite réelle U définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$

1. Montrer que la suite U est croissante.
2. Montrer que $\forall n \geq 1$ on a : $U_{2n} - U_n \geq \dfrac{1}{2}$

3 En déduire que la suite U n'est pas majorée.

4 Déterminer la limite de la suite U.

Exercice 12 :

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$U_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{k}{3^k} = -\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}-\frac{3}{3^3}+\cdots+(-1)^n\frac{n}{3^n}$$

1 Montrer que la suite (U_{2n}) est décroissante.

2 Montrer que la suite (U_{2n+1}) est croissante.

3 a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a : $U_{2n} > U_{2n+1}$

b) Calculer $\lim_{n\to+\infty}(U_{2n} - U_{2n+1})$.

4 Montrer que la suite (U_n) converge vers un réel α et que $U_3 < \alpha < U_2$

Exercice 12 bis :

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = \dfrac{2U_n+3}{U_n+4}$

1 a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \le U_n \le 1$

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

2 Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \dfrac{U_n-1}{U_n+3}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} V_n$ et $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} V_k$

c) Exprimer U_n en fonction de n et retrouver la limite de (U_n).

Exercice 13 :

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = \dfrac{U_n^2 - 3U_n + 6}{U_n - 1}$

1 a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $3 \le U_n \le 4$

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c) Montrer que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

2 a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \le U_{n+1} - 3 \le \frac{1}{2}(U_n - 3)$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \le U_n - 3 \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$

3. On admet que $\forall n \geq 4$ on a : $2^n \geq n^2$

Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = n(U_n - 3)$

   a. Montrer que $\forall n \geq 4$ on a : $V_n \leq \frac{1}{n}$
   b. Déterminer alors la limite de la suite V.

Exercice 14 :

1. a. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a : $1 - \frac{1}{k^2} = \left(\frac{k-1}{k}\right)\left(\frac{k+1}{k}\right)$

   b. Soit $U_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$; $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ calculer $\lim_{n \to +\infty} U_n$

2. Soit $V_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$; $n \in \mathbb{N}^*$

   a. Montrer que la suite V_n est croissante.
   b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $V_{2n} - V_n \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$
   c. En déduire que la suite V_n diverge vers $+\infty$.

Exercice 15 :

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On définie sur $\mathbb{N}$ deux suites réelles U et V par

$$\begin{cases} U_0 = a \quad \text{et} \quad V_0 = b \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_nV_n}{U_n + V_n} \quad \text{et} \quad V_{n+1} = \dfrac{U_n + V_n}{2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n < V_n$
2. Montrer que la suite U est croissante et que la suite V est décroissante.
3. Montrer que les suites U et V sont convergentes
4. a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $V_{n+1} - U_{n+1} < \frac{1}{2}(V_n - U_n)$
   b. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $V_n - U_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a)$
   c. En déduire que les suites U et V sont adjacentes et qu'elles ont la même limite L.
5. a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_nV_n = ab$.
   b. En déduire la valeur de L.

Exercice 16 :

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{U_n + 2}$

1. Calculer U_1 et U_2 et en déduire que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2.
   a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n > 0$.
   b. Montrer que la suite (U_n) est décroissante.
   c. En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.
3. Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \dfrac{U_n}{U_n + 1}$
   a. Montrer que la suite (V_n) est géométrique.
   b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n = \dfrac{1}{2^{n+1} - 1}$
   c. Retrouver la limite de la suite (U_n).

Exercice 17 :

Soit la fonction f définie sur par $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{2}(1+x)}$

1.
   a. Montrer que f est dérivable sur et déterminer $f'(x)$.
   b. Montrer que pour tout $x \in [0\,;1]$ on a : $f'(x) \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
2. Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = f(U_n)$
   a. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq 1$
   b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} - 1 \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}} U_n - 1$
   c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n - 1 \leq \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$
   d. Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

Exercice 18 :

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = -3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = \dfrac{U_n - 8}{2U_n - 9}$

1.
   a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n < 1$.
   b. Montrer que la suite (U_n) est croissante.
   c. En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.
2. Soit la suite réelle (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n - 4}$

(a) Montrer que la suite (W_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

(b) Exprimer (W_n) puis (U_n) en fonction de n et retrouver la limite de la suite (U_n).

3 (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{7}U_n - 1$

(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n - 1 \leq 4\left(\frac{1}{7}\right)^n$

(c) Retrouver la limite de la suite (U_n).

Exercice 19 :

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = \dfrac{1+(U_n)^2}{2U_n}$

1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \geq 1$

2 (a) Étudier la monotonie de la suite (U_n).

(b) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

3 (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et retrouver la limite de la suite (U_n)

4 Soit la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $n \leq S_n \leq n + 1 - \frac{1}{2^n}$

(b) Déterminer alors $\lim_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$

Exercice 20 :

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = \dfrac{2U_n}{1+(U_n)^2}$

1 (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n < 1$.

(b) Montrer que la suite (U_n) est monotone.

(c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

2 Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \dfrac{1-U_n}{1+U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $V_{n+1} = (V_n)^2$.

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^n}$.

c) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$; $P_n = V_0 \times V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$ montrer que $P_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n+1}-1}$

d) Calculer $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{P_n}{V_{n+1}}\right)$