Exercice 1 :5points

On définie la suite u = $(u_n)_{n\geq 0}$

par : $u_0 = 1$ et, pour $n \geq 0$ $u_{n+1} = 2u_n + \frac{1}{u_n}$,

1) a) Montrer que pour tout n on a : $u_n > 0$.

b) Etudier la monotonie de cette suite.

c) Déduire que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

2) On pose, pour $n \geq 0$, $v_n = \frac{u_n}{2^n}$

a) Montrer qu'on a ; $0 < v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

b) En déduire que la suite $v = (v_n)_{n\geq 0}$ est majorée par 2,

c) Déduire alors que la suite v est convergente.

Exercice 2:

On considère la suite u définie par :

$u_0 = \frac{3}{4}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 + \frac{1}{2}u_n$.

1) a / Montrer que pour tout n, $0<u_n<1$

b / Montrer que u est convergente et calculer sa limite .

2) a / Montrer que tout n : $u_{n+1} \leq \frac{7}{8} u_n$

b) Déduire que pour tout n : $0< u_n < \frac{3}{4}(\frac{7}{8})^n$

c) Retrouver alors lim u_n.

Exercice 3:

Démontrer chaque réponse si elle est vrai

1)On considère (u_n) positive et la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$

a) Pour tout $n \geq 0$ *on a* $v_n \leq 1$.

b) Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.

c) Si (v_n) est convergente, alors (u_n) est convergente.

d) Si (u_n) est croissante, alors (v_n) est croissante.

2) Soit u la suite réelle définie par :

$u_0 = 0$ et pour tout $n \in IN$, $u_{n+1} = u_n + \sqrt{1+u_n}$

a) La suite u est convergente.

b) $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

c) On ne peut pas conclure.

3) Etant donné une suite (x_n), de nombres réels, définie pour tout entier naturel n, on considère la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$

a) Si la suite (x_n) est convergente, alors la suite (S_n) l'est aussi.

b) Si les suites (x_n) et (S_n) ont le même sens de variation.

4) Les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier n >0 par : $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ sont adjacentes

5) La suite u ; $u_n = n + (-1)^n$ tend vers $+\infty$.

6) Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites telles que $\begin{cases} 0 \leq u_n \leq 1 \\ 0 \leq v_n \leq 1 \\ \lim_{n\to+\infty} u_n v_n = 1 \end{cases}$ alors (u_n) et (v_n) sont convergentes.

7) La suite u définie sur IN par $u_n = \frac{n+(-1)^n\sqrt{n}}{2n+3}$ est convergente.

8) $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = +\infty$

Exercice 4 :

1) Soit x un réel positif, montrer que pour tout entier naturel n on a : $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

2) Soit U la suite définie sur IN^* par $U_n = \frac{n!}{n^n}$.

a) Montrer que : $\frac{U_n}{U_{n+1}} \geq 2$

b) Montrer alors que la suite U est convergente.

c) Montrer que pour tout $n \in IN^*$; $U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n$.

d) Calculer alors la limite de U.

Exercice 5:

Soit u la suite définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{\sqrt{3+u_n^2}}$

1) Montrer que pour tout n, on a $0 \leq u_n < 1$.

2) a) Montrer que pour tout n, on a : $u_{n+1} > \frac{1+u_n}{2}$

b) Déduire les variations de la suite u.

c) Montrer que u est convergente.

3) Montrer que $\forall$ n, on a : $0 < 1-u_{n+1} < \frac{1}{2}(1-u_n)$

4) Trouver la limite de la suite u.

Exercice 6: (6 points)

Soit la fonction f définit sur IR par $f(x) = x - x^2$

1) Etudier les variations de f sur IR

2) On définit la suite (u_n) par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout n de N, $u_{n+1} = f(u_n)$

a) Étudier la monotonie de la suite (u_n)

b) Prouver que pour tout entier $p \geq 1$,

$f\left(\frac{1}{p}\right) \leq \frac{1}{p+1}$

3) a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice 7:

Soit (u_n) la suite définie par :

$u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = 1 + u_n + \frac{1}{1+u_n}$

1 / a) Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n > 0$.

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c) Montrer que $\lim u_n = +\infty$

2/ a) Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}$ on a: $1 + u_n < u_{n+1}$.

b)Mque $n + \frac{1}{2} \leq u_n$; $n \in \mathbb{N}$

c) Retrouver alors que $\lim u_n = +\infty$

Exercice 8:

I/ Soit f la fonction définie sur IR* par $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$

1)Dresser le tableau de variation de f.

2)Déduire la monotonie de fof sur $[1, +\infty[$

II/ Soit la suite (u_n) définie par: $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

1°) Dque $\forall$ n de IN on a: $1 \leq u_n$

2°) On considère les suites (v_n) et (w_n) telles que:

$v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

a) Vérifier que $v_{n+1} = fof(v_n)$ et que $w_{n+1} = fof(w_n)$

b) Déduire que les suites v et w sont monotones.

3) a) Montrer que $v_n \leq 2$ et que $2 \leq w_n$

b) Déduire que les deux suites v et w sont adjacentes.

4°) Montrer alors que la suite (u_n) est convergente vers une limite que l'on précisera.

Exercice 9:

Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{2}{u_n} \end{cases}$

1° Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$

2° a) Montrer que $u_{n+1}^2 - u_n^2 \geq 4$

b) En déduire que $u_n \geq 2\sqrt{n}$

c)Déterminer alors la limite de la suite u.

3° Soit v la suite définie sur IN* par $v_n = u_{n+1}^2 - u_n^2$.

a) Montrer que pour tout n de IN*, $v_n \leq 4 + \frac{1}{n}$

b) Déterminer alors la limite de la suite v.

4° a) Mque pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{2n} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$

b) En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 2\sqrt{n}$.

5° Soit s la suite définie sur IN* par $s_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$

a) Montrer que $s_n \leq 4n + 2\sqrt{n}$.

b) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n^2}{n}\right)$

Exercice 10:

Pour tout entier n strictement positif, on définit la fonction f_n sur IR par $f_n(x) = \frac{x}{n + x^2}$

et la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + n(u_n)^2} \end{cases}$

1) Etudier les variations de f_n sur $[0, +\infty[$

2) On pose, $\forall$ n non nul, $a_n = nu_n$

a)Vérifier que, $\forall\ n \geq 1$; $a_{n+1} = (n+1)\, f_n(a_n)$

b) Dém par récurrence que $\forall n \geq 2$; $0 < a_n < 1$

(On pourra utiliser les variations de f_n sur [0, 1]

3)a)Prouver que, pour tout $n \geq 2$; $0 < u_n \leq \frac{1}{n}$

b) Déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite

4) Etudier la monotonie de la suite (u_n)

Exercice 11:

Soit s la suite définie sur IN* par $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

1)a)Montrer que pour tout $n \geq 1$; $s_n \geq \frac{n}{\sqrt{n}}$

b)La suite s est-elle convergente ?

2) Vérifier que pour tout entier $n \geq 1$,

$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$

3) On considère les suites u et v définies sur IN* par : $u_n = 2\sqrt{n} - s_n$ et $v_n = u_n + \frac{1}{\sqrt{n}}$

a)Démontrer que les suites u et v sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\zeta} \frac{s_n}{2\sqrt{n}}$

Exercice 12 :(6 points)

Soient f et g deux fonctions continues sur [0, 1] à valeurs dans [0, 1] et telles que pour tout x de [0, 1], f o g(x) =g o f(x).

On se propose de montrer qu'il existe un réel c de [0, 1] tel que f(c) = g(c).

1) Soit h la fonction définie par : h(x) = f(x) – x.

a) Montrer que h s'annule en au moins un réel a de [0, 1].

b) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1)$ $g^n(a) = f\left[g^n(a)\right]$ où $g^n = \underbrace{gogo\ldots og}_{\text{n fois g}}$.

2) Soit (u_n) la suite définie sur IN* par : $u_n = g^n(a)$.

a) Vérifier que $f(u_n) = u_n$ et que $g(u_n) = u_{n+1}$.

b) On suppose que la suite (u_n) est monotone.

Montrer alors qu'elle est convergente vers un rées ℓ
Que peut-on dire de f(ℓ) et g(ℓ) ?

c) On suppose que la suite (u_n) n'est pas monotone.

Montrer qu'il existe deux réels p et q tels que le produit (f – g)(p)×(f – g)(q) soit négatif.

3) Conclure

Exercice 13:(6 points)

Soit x un nombre réel positif ou nul et k un entier strictement supérieur à x.

1) a) Montrer par récurrence sur n que pour tout entier n supérieur ou égal à k ;

$$\frac{k^n}{n!} \leq \frac{k^k}{k!}$$

b) En déduire que pour tout n supérieur ou égal à k ;

$$\frac{x^n}{n!} \leq \left(\frac{x}{k}\right)^n \cdot \frac{k^k}{k!}$$

c) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$

2) a) Montrer que pour tout n supérieur ou égal 2, $\frac{n^{n-1}}{n!} \geq 1$

b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!}$

Exercice 14 (4 points)

On considère, pour chaque entier n >1, la fonction f_n définie sur IR+ par :

$f_n(x) = x^{n+1} + x^n + x^2 + x - 1$.

Soit $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative.

1) a) Montrer que la fonction f_n est strictement croissante

b) Etudier la position relative de $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n+1}$

2) a) Montrer que $f_n(x) = 0$ possède une seule solution que l'on notera u_n.

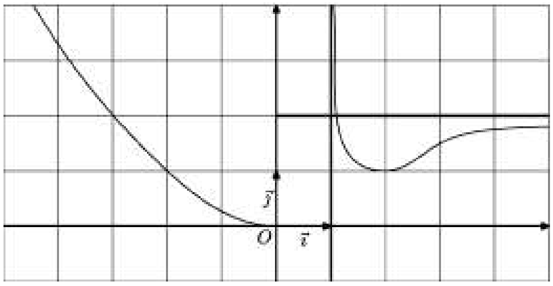
b) Montrer que pour tout n >1, $0 < u_n < \frac{2}{3}$

c) Montrer que (u_n) est convergente converge.

3) a) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n^n = \lim_{n\to+\infty} u_n^{n+1} = 0$

b) Calculer alors la limite de la suite (u_n).

Exercice 15:



Soient

g : [0,1] → [0,1] une application continue et strictement décroissante.

f : la fonction dont la représentation graphique est donnée ci-dessus.

I/ 1) Déterminer le domaine de définition de la fonction $g \circ f$.

2) Dresser le tableau de variations de $g \circ f$ sur [-2, 0].

3) Calculer les limites éventuelles suivantes :

$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - \frac{2x}{x+1}\right)$, ; $\lim_{x\to-2^+} gof(x)$; $\lim_{x\to 0} f\left(\frac{\sin x+\tan 2x}{3x}\right)$

II/

1) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, il existe un unique réel a_n appartenant à [0,1] tel que $g(a_n) = a_n^n$.

(On pourra considérer la fonction $h_n(x) = g(x) - x^n$)

2) a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq1}$ est croissante.

b) Déduire que la suite $(a_n)_{n\geq1}$ est convergente vers un réel ℓ.

3) a) <u>Supposons que $\ell < 1$,</u>

i) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} a_n^n = 0$

ii) Déduire que $g(\ell) = 0$

b) Conclure alors la valeur de ℓ.