Suites réelles

Les suites réelles

classes $4^{ème}$

I. Définition :

Une suite réelle est une application définie sur une partie $I \subset IN$ vers IR

$U : I \longrightarrow IN$

$\quad n \longrightarrow U_n$

II. Suites arithmétiques suites géométriques :

Suites arithmétiques

1) Pour tout $n \in I$, $U_{n+1} = U_n + r$
2) Pour tout $n \in I$, $U_n = U_0 + n\,r$
3) Pour tout $n \in I$, $m \in I$ $U_n = U_m + (n-m)\,r$
4) $U_m + U_{m+1} + \ldots + U_n = (n-m+1)\dfrac{U_m + U_n}{2}$

Nombre de termes de la somme

suites géométriques

1) Pour tout $n \in I$, $U_{n+1} = q\,U_n$
2) Pour tout $n \in I$, $U_n = U_0\,q^n$
3) Pour tout $n \in I$, $U_n = U_m\,q^{(n-m)}$
4) $U_m + U_{m+1} + \ldots + U_n = U_m \dfrac{1-q^{n-m+1}}{1-q}$ $(q \neq 1)$

1^{er} terme de la somme — dernier terme de la somme

Remarque 1 on a : $1+q+q^2+\ldots+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$ et $1+q+q^2+\ldots+q^n = n+1$ si $q = 1$

Remarque 2 :

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } q > 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } -1 < q < 1 \\ \text{n'existe pas si } q \leq -1 \end{cases}$$

Remarque 3 :

- Si $U_n = a\,n + b$ alors U est une suite arithmétique de raison $r = a$
- Si $U_n = b\,a^n$ alors U est une suite géométrique de raison $q = a$
- a, b et c sont 3 termes consécutifs d'une suite arithmétique signifie $a + c = 2b$
- a, b et c sont 3 termes consécutifs d'une suite géométrique signifie $a\,c = b^2$
- $\sum_{k=p}^{n}(\alpha U_k + \beta V_k) = \alpha \sum_{k=p}^{n} U_k + \beta \sum_{k=p}^{n} V_k$ (α et β deux constantes réelles)

III. Suite majorée – suite minorée – suite bornée :

1) U est majorée $\Leftrightarrow$ il existe un réel M tel que $\forall n \in I$ on a : $U_n \leq M$.
2) U est minorée $\Leftrightarrow$ il existe un réel m tel que $\forall n \in I$ on a : $U_n \geq m$.
3) U est bornée $\Leftrightarrow$ elle est à la fois majorée et minorée.
   $\Leftrightarrow$ il existe deux réels m et M tel que $\forall n \in I$ on a : $m \leq U_n \leq M$.

IV. Sens de variation d'une suite :

1) Une suite U est strictement croissante sur I $\Leftrightarrow \forall n \in I$ on a : $U_{n+1} > U_n$.
2) Une suite U est strictement décroissante sur I $\Leftrightarrow \forall n \in I$ on a : $U_{n+1} < U_n$.
3) Une suite U est constante sur I $\Leftrightarrow \forall n \in I$ on a : $U_{n+1} = U_n$.
4) Une suite U est monotone sur I $\Leftrightarrow$ U est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.

Remarque :

Toute suite croissante est minorée par son premier terme $(U_0 < U_1 < U_2 < \ldots\ldots$

Toute suite décroissante est majorée par son premier terme $(U_0 > U_1 > U_2 > \ldots\ldots$

V. Suites convergentes :

1) Définition :

Une suite est **convergente** si et seulement si **elle admet une limite finie**

2) Remarques :

- Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente c'est-à-dire elle n'a pas de limite ou sa limite est infinie.
- Si une suite est convergente alors sa limite est unique.
- Si $\lim_{n \to +\infty} U_n = \ell$ alors on a aussi $\lim_{n \to +\infty} U_{n+1} = \ell$

Théorème : $\lim_{n \to +\infty} U_n = \ell \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} U_{2n} = \ell$ et $\lim_{n \to +\infty} U_{2n+1} = \ell$

3) Opérations sur les limites des suites convergentes :

Soient U et V deux suites convergentes alors :

- La suite U+V est convergente et on a : $\lim_{n \to +\infty}(U_n + V_n) = \lim_{n \to +\infty} U_n + \lim_{n \to +\infty} V_n$
- La suite U×V est convergente et on a : $\lim_{n \to +\infty}(U_n \times V_n) = \lim_{n \to +\infty} U_n \times \lim_{n \to +\infty} V_n$
- Si $\lim_{n \to +\infty} U_n \neq 0$ alors La suite $\dfrac{1}{U}$ est convergente et on a : $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{1}{U_n} = \dfrac{1}{\lim_{n \to +\infty} U_n}$
- Si $\lim_{n \to +\infty} U_n \neq 0$ alors La suite $\dfrac{V}{U}$ est convergente et on a : $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{V_n}{U_n} = \dfrac{\lim_{n \to +\infty} V_n}{\lim_{n \to +\infty} U_n}$

4) Les théorèmes des encadrements :

- **Théorème 1 :** Si $U_n > a$ et $\lim_{n \to +\infty} U_n = \ell$ alors $\ell \geq a$
- **Théorème 2 :** Si $a < U_n < b$ et $\lim_{n \to +\infty} U_n = \ell$ alors $a \leq \ell \leq b$
- **Théorème 3 :** Si $U_n \leq V_n$ et $\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ alors $\lim_{n \to +\infty} V_n = +\infty$
- **Théorème 4 :** Si $U_n \leq V_n$ et $\lim_{n \to +\infty} V_n = -\infty$ alors $\lim_{n \to +\infty} U_n = -\infty$
- **Théorème 5 :** Si $V_n < U_n < W_n$ et $\lim_{n \to +\infty} V_n = \lim_{n \to +\infty} W_n = \ell$ alors $\lim_{n \to +\infty} U_n = \ell$
- **Théorème 6 :** Si $|U_n - \ell| \leq V_n$ et $\lim_{n \to +\infty} V_n = 0$ alors $\lim_{n \to +\infty} U_n = \ell$

En particulier Si $|U_n| \leq V_n$ et $\lim_{n \to +\infty} V_n = 0$ alors $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$

5) Théorème :

- Si une suite U est **croissante et majorée** alors elle est convergente vers un réel ℓ et on a alors $\forall n \in I$, $U_n \leq \ell$
- Si une suite U est **décroissante et minorée** alors elle est convergente vers un réel ℓ et on a $\forall n \in I$, $\ell \leq U_n$

Théorème :

*Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$

* [illegible] suit[illegible]issan[illegible]n mi[illegible]

Remarque : Soit une suite (U_n) définie sur une partie $I \subset IN$

Si la suite (U_n) est croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$ alors $\forall n \in I$, $U_n \le \ell$

Si la suite (U_n) est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$ alors $\forall n \in I$, $\ell \le U_n$

VI. Operations sur les limites:

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n+V_n)$
a	b	a+b
$+\infty$	b	$+\infty$
$-\infty$	b	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n \times V_n)$
a	b	ab
∞	$b\neq 0$	∞
∞	∞	∞

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{U_n}{V_n}\right)$
a	$b\neq 0$	$\frac{a}{b}$
∞	$b\neq 0$	∞
a	∞	0
$a\neq 0$	0	∞

VII . Suite de type Un = f(n) :

Théorème : Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$

VIII . Suite de type $U_{n+1} = f(U_n)$

Théorème : Si U converge vers un réel ℓ + f est continue en ℓ alors $f(\ell) = \ell$

IX. Suites adjacentes :

Définition:

Deux suites (U_n) et (V_n) définies sur IN sont adjacentes lorsqu'elles vérifient les conditions suivantes

- Pour tout $n \ge 0, U_n \le V_n$
- La suite (U_n) et croissante
- La suite (V_n) est décroissante
- La suite $(V_n - U_n)$ converge vers 0

Théorème

Deux suites adjacentes (U_n) et (V_n) convergent vers la même limite

Prof: Mr Ben Brahim. M . H

Lycée Pilote Nabeul

Série d'exercices N°....

$4^{ème}$

Exercice 1 : Etudier la monotonie de la suite U.

1) $U_n = 2^n + 3n \quad n \in IN$ 2) $U_n = 5n + \sin 2n \quad n \in IN$ 3) $U_n = \dfrac{3^n}{n!}$, $n \geq 2$ 4) $\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2} \end{cases} \quad n \in IN$

Exercice 2 : Soit la suite U définie sur IN* par $U_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dots + \dfrac{1}{2n}$

1) Calculer U_1, U_2 et U_3.
2) Montrer que pour tout entier naturel n on a $\dfrac{1}{2} \leq U_n \leq 1$
3) Montrer que la suite U est croissante.
4) En déduire que la suite U est convergente vers un réel $l \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$

Exercice 3 : Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

1) $U_n = (-2) \times 5^n$ 2) $U_n = \dfrac{(-3)^{n+1}}{5^n}$ 3) $U_n = \dfrac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$ 4) $U_n = \dfrac{5n^3 - 2n^2 - 3n + 5}{n^2 - 3}$

5) $U_n = 2n + \sin 3n$ 6) $U_n = \dfrac{\sin 2n}{3n+4}$ 7) $U_n = (3n+1)^n$ avec $n \geq 1$

8) $U_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 9) $U_n = \dfrac{n + (-1)^n}{2n + (-1)^{n+1}}$ 10) $U_n = \left(\dfrac{2}{n}\right)^n$ avec $n \geq 4$

Exercice 4 : On considère la suite U définie sur IN* par : $U_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + \dots + \dfrac{n}{n^2+n}$

1) Calculer U_1, U_2 et U_3.
2) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ on a : $\dfrac{n^2}{n^2+n} \leq U_n \leq \dfrac{n^2}{n^2+1}$
3) Montrer que la suite U est convergente.

Exercice 5:

Exercice 6 : Soit la suite U définie sur IN* par $U_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dots + \dfrac{1}{n^2}$

1) Montrer que quelque soit $p \in IN^*$ on a : $\dfrac{1}{(p+1)^2} \leq \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1} \leq \dfrac{1}{p^2}$
2) En déduire que quelque soit $n \in IN^*$ on a : $1 - \dfrac{1}{n+1} \leq U_n \leq 2 - \dfrac{1}{n+1}$
3) Montrer que la suite U est convergente vers un $l \in [1,2]$

Exercice 7 : On considère la suite U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{4 + 3U_n} \quad \forall n \in IN \end{cases}$

1)
a) Montrer que pour tout $n \in IN$ on a $0 \leq U_n < 4$
b) Montrer que la suite U est croissante.
c) Montrer que la suite U est convergente et calculer sa limite ~~croissante et quelle est convergente~~

2) a) Montrer que $\forall n \in IN \quad 4 - U_{n+1} = \dfrac{3(4 - U_n)}{4 + \sqrt{3U_n + 4}}$

b) En déduire que $\forall n \in IN$ on a : $4 - U_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(4 - U_n)$

c) Montrer que $\forall n \in IN$: $4 - U_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$

Exercice 8 Soit la fonction $f : IR \to IR$ $x \to \frac{4x+3}{x+6}$

1) Dresser le tableau de variation de f
2) Soit la suite U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n+3}{U_n+6} \end{cases}$ $\forall n \in IN$

   a) Montrer que pour tout $n \in IN$ on a : $-3 < U_n < 1$
   b) Montrer que U est une suite croissante.
   c) Montrer que U est convergente et calculer sa limite
3) Soit la suite V défini sur IN par $V_n = \frac{U_n-1}{U_n+3}$.

   a)Montrer que V est une suite géométrique.
   b)Calculer V_n puis U_n en fonction de n et retrouver $\lim U_n$

Exercice 9 : Soit la suite U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n^2 + \frac{1}{3^{n+1}}} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout $n \in IN$ on a : $U_n \geq 1$.
2) Montrer que la suite U est croissante.
3) Soit V la suite définie sur IN par $V_n = U_n^2$

   a) Vérifier que pour tout $n \in IN$ on a : $V_{n+1} = V_n + \frac{1}{3^{n+1}}$ et en déduire l'expression de V_n en fonction de n.
   b) Calculer $\lim V_n$ puis $\lim U_n$.

Exercice 10 :

Soit (U_n) la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$

1/Démontrer que (U_n) est croissante.

2/ a) Démontrer que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $U_{2n} - U_n \geq \frac{1}{2}$

b) En déduire que la suite U n'est pas majorée

c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

Exercice 11 : Soit les suites U et V définies par $U_0 = 1$, $V_0 = 2$ et pour tout $n \in IN$:
$U_{n+1} = \frac{2U_nV_n}{U_n+V_n}$ et $V_{n+1} = \frac{U_n+V_n}{2}$

1) Démontrer que $\forall n \in IN$ on a, $0 < U_n < V_n$
2) a) Montrer que U est croissante et V est décroissante
   b) Montrer que U et V sont convergentes vers la même limite ℓ.
3) a) Montrer que $\forall n \in IN$, $U_n V_n = 2$
   b) En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 12 :

Soit (U_n) la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $U_n = 1 + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

On considère les suite (V_n) et (W_n) définie sur IN* par $V_n = U_{2n}$, $W_n = U_{2n+1}$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $V_n < W_n$
2) Montrer que les suites V et W sont adjacentes
3) Montre que la suite U est convergente vers un réel α.
4) a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n \leq \alpha \leq W_n$
   b) Calculer U_4 et U_5 et donner une valeur [illegible] à 10^{-3} près

Prof : Mr Ben Brahim
Lycée Pilote Nabeul

Série d'exercices N°4 — 4ème Math

Exercice 1 : Soit la fonction $f : IR \to IR$, $x \to \dfrac{4x+3}{x+6}$

1) Dresser le tableau de variation de f
2) Soit la suite U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \dfrac{4U_n+3}{U_n+6} & \forall n \in IN^* \end{cases}$

   a) Montrer que pour tout $n \in IN$ on a : $-3 < U_n < 1$
   b) Montrer que U est une suite croissante.
   c) Montrer que U est convergente et calculer sa limite

Exercice 2 :

Soit un fonction tels que

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	

et f(2) = 1,5

Soit la suite U définie sur IN par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

1) Montrer que pur tout $n \in IN$ on a $1 < U_n \leq 2$
2) Montrer que la suite U est décroissante
3) Montrer que la suite U est convergente et calculer sa limite.

Exercice 3 : Soit la suite U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{3U_n + 4} \end{cases}$

1) Montrer que $\forall n \in IN, 0 \leq U_n < 4$.
2) a) a) Montrer que $\forall n \in IN$ $4 - U_{n+1} = \dfrac{3(4-U_n)}{4+\sqrt{3U_n+4}}$ et que $4 - U_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(4-U_n)$

   b) En déduire la limite de U_n.
3) Soit les suites U et t définie sur IN par $V_n = n(4-U_n)$ et $t_n = \dfrac{n}{2^n}$..

   a) Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a : $C_n^2 < 2^n$
   b) Déduire les limites respectives des suite t et V.

Exercice 4 : On considère la suite U définie sur IN* par : $U_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + \ldots + \dfrac{n}{n^2+n}$

1) Calculer $U_1, U_2 et U_3$.
2) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ on a : $\dfrac{n^2}{n^2+n} \leq U_n \leq \dfrac{n^2}{n^2+1}$ et en déduire la limite de U_n.

Exercice 5 : Soit la suite U définie sur IN* par $U_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$

1) Calculer U_1 , U_2 et U_3.
2) Montrer que la suite U est croissante.
3) Montrer que la suite U est convergente vers un réel $l \in \left[1 \quad 1 \right]$

Exercice 6 : Soit la suite U définie sur IN* par $U_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$

1) Montrer que quelque soit $p \in IN^*$ on a : $\frac{1}{(p+1)^2} \leq \frac{1}{p}-\frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{p^2}$
2) En déduire que quelque soit $n \in IN^*$ on a : $1-\frac{1}{n+1} \leq U_n \leq 2-\frac{1}{n+1}$
3) Montrer que la suite U est convergente vers un $l \in [1,2]$

correction

Exercice 7 : Soit la suite U définie sur IN* par : $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k}{n^2}\right)$

1) Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a : $1-\frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1$
2) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3) Déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a : $1-\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^4} \leq U_n \leq 1$
4) Etudier la convergence de la suite U.

Exercice 8 : Soit h une fonction continue et strictement sur $[0,+\infty[$ tel que $f([0,+\infty[) = [0,1[$

1) Montrer que pour tout $n \in IN^* \setminus \{1\}$, l'équation $h(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution α_n.

2) On définie la suite (α_n) définie sur $IN^*\setminus\{1\}$, Montrer que la suite (α_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 9 : Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = U_n + \frac{2}{U_n}$.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n \geq 2$.
2) Montrer que (U_n) est croissante puis $U_n \to +\infty$.
3) Montrer que l'on a : $4 \leq U_{n+1}^2 - U_n^2 \leq 4 + U_{n+1} - U_n$, en déduire que : $4n \leq U_n^2 - 4 \leq 4n + U_n - 2$
4) Montrer alors que : $1-\frac{1}{U_n}-\frac{2}{U_n^2} \leq \frac{4n}{U_n^2} \leq 1-\frac{4}{U_n^2}$.
5) Soit $V_n = \frac{U_n}{\sqrt{n}}$; $n \geq 1$, étudier la convergente de (V_n) et préciser sa limite.

Exercice 10 :

Soit (U_n) la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $U_n = 1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

On considère les suite définie sur IN* par (U_{2n}) , (U_{2n+1})

1) Montrer que les suites (U_{2n}) et (U_{2n+1}) sont adjacentes

2) Montre que la suite (U_n) est convergente vers un réel α et que $U_{100} < \alpha < U_{101}$

Exercice 11 :

Soit les suites U et V définies par $U_0 = 1$, $V_0 = 2$ et pour tout $n \in IN$:
$U_{n+1} = \frac{2U_nV_n}{U_n+V_n}$ et $V_{n+1} = \frac{U_n+V_n}{2}$

1) Démontrer que $\forall n \in IN$ on a, $0 < U_n < V_n$
2) a) Montrer que U est croissante et V est décroissante
   b) Montrer que U et V sont convergentes vers la même limite ℓ.
3) a) Montrer que $\forall n$ ...
   b) En dédui...

4ème Math

Lycée Pilote Nabeul — Série d'exercices N°2 (Suites réelles)

Exercice : On considère la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{x}{1+x+x^2}$

On note U la suite définie sur IN par : $\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=g(U_n) \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout x réel positif, $g(x)\le x$ puis résoudre $g(x)=x$.
   b) En déduire que la suite U est convergente et trouver sa limite.

2) a) Montrer que, pour tout $n\in IN^*$ on a : $g\left(\dfrac{1}{n}\right)\le\dfrac{1}{n+1}$

   b) Dresser le tableau de variation de la fonction g.

   c) En déduire que pour tout $n\in IN$ on a $0\le U_n\le\dfrac{1}{n+1}$ et retrouver la limite de U_n.

3) a) Montrer que pour tout $n\in IN$ on a : $1\le\dfrac{1}{U_{n+1}}-\dfrac{1}{U_n}\le 1+\dfrac{1}{n+1}$

   b) En déduire que pour tout $n\in IN^*$ on a : $n\le\dfrac{1}{U_n}-1\le n+\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$

   c) Montrer alors que, pour tout $n\in IN^*$ on a : $n+1\le\dfrac{1}{U_n}\le 2n+1$

   d) Soit la suite V définie sur IN^* par $V_n=U_n\sqrt{n}$

   Montrer que la suite V est convergente et calculer sa limite.

Correction

Exercice 7 : $U:\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=g(U_n);n\in\mathbb{N} \end{cases}$

1)

a) $\forall x\ge 0\,;\,g(x)\le x$?

- $\forall x\ge 0$, on a : $x-g(x)=x-\dfrac{x}{1+x+x^2}=\dfrac{x^3+x^2+x-x}{1+x+x^2}=\dfrac{x^3+x^2}{1+x+x^2}\ge 0$

d'où $\forall x\ge 0\,;\,g(x)\le x$

- $g(x)=x\Leftrightarrow\dfrac{x}{1+x+x^2}=x\Leftrightarrow x=x+x^2+x^3\Leftrightarrow x^2(x+1)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=-1$ à rejeté car $x\ge 0$

b) Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}\,;\,U_n\ge 0$?

- On a : $U_0=1$ alors $U_0\ge 0$ d'où P est vraie pour $n=0$.
- Soit $p\in\mathbb{N}$, supposons que : $U_p\ge 0$. Montrons que : $U_{p+1}\ge 0$?

- On a : $U_{p+1}=\dfrac{\overbrace{U_p}^{\ge 0}}{\underbrace{1+\underbrace{U_p}_{\ge 0}+\underbrace{U_p^2}_{\ge 0}}_{>0}}\ge 0$

D'où d'après le principe de raisonnement par récurrence, $U_n\ge 0\,;\,\forall n\in\mathbb{N}$.

- On a : $\forall x\ge 0$: $g(x)\le x$

  En particulier pour $x=U_n\,(n\in\mathbb{N})$ On a : $g(U_n)\le U_n\Rightarrow U_{n+1}\le U_n$

  D'où U est une suite décroissante.

  Or $U_n\ge 0\,;\,\forall n\in\mathbb{N}$ alors U_n est minorée par 0.

  D'où U est convergente vers un réel ℓ.

- On a : g est la restriction d'une fonction rationnelle continue sur son $Df=\mathbb{R}_+$ donc g est continu en ℓ.

D'où $g(\ell)=\ell$

D'où ℓ est une solution de l'équation $g(x)=x$ D'où $\ell=0$ (d'après 1)).

2) $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $g\left(\dfrac{1}{n}\right)\le\dfrac{1}{n+1}$?

- On a : $g\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\dfrac{n}{n^2+n+1}$

D'où $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $g\left(\dfrac{1}{n}\right)-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n}{n^2=n+1}-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n^2+n-n^2-n-1}{n^2+n+1}=\dfrac{-1}{n^2+n+1}\le 0$

D'où : $g\left(\dfrac{1}{n}\right)\le\dfrac{1}{n+1}\,;\,\forall n\in\mathbb{N}^*$

a) On a : $g(x)=\dfrac{x}{1+x+x^2}$

$\forall x\in[0,+\infty[\,;\,g'(x)=\dfrac{1+x^2+x^2-x-2x^2}{(1+x+x^2)^2}=\dfrac{1-x}{(1+x+x^2)^2}$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	
$g'(x)$	0	↗	$\frac{1}{3}$	↘	0

b) $\forall n\in\mathbb{N}\,;\,0\le U_n\le\dfrac{1}{n+1}$?

P « $\forall n\in\mathbb{N},\,0\le U_n\le\dfrac{1}{n+1}$ »

* On a : $U_0=1\Rightarrow 1\le U_0\le 1$; d'où P est vraie pour $n=0$

*Soit $p\in\mathbb{N}$, supposons que : $0\le U_p\le\dfrac{1}{p+1}$

Montrer que : $0\le U_{p+1}\le\dfrac{1}{p+2}$

On a : $\left.\begin{array}{l} 0\le U_p\le\dfrac{1}{p+1} \\ g \text{ et } \nearrow \text{ sur } [0,1] \\ \dfrac{1}{p+1}\in[0,1] \end{array}\right\}\Rightarrow g(0)\le g(U_p)\le g\left(\dfrac{1}{p+1}\right)\Rightarrow 0\le U_{p+1}\le g\left(\dfrac{1}{p+1}\right)$

Or d'après 2)a) on a : $g\left(\dfrac{1}{p}\right)\le\dfrac{1}{p+1}$ alors $g\left(\dfrac{1}{p+1}\right)\le\dfrac{1}{p+2}$ d'où $0\le U_{p+1}\le\dfrac{1}{p+2}$

D'après le principe de raisonnement par récurrence, on P est vraie $\forall n\in\mathbb{N}$.

* On a : $0\le U_n\le\dfrac{1}{n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=0$

2)

a) $\forall n\in\mathbb{N},\,1\le\dfrac{1}{U_{n+1}}-\dfrac{1}{U_n}\le 1+\dfrac{1}{n+1}$?

On a : $\dfrac{1}{U_{n+1}}-\dfrac{1}{U_n}=\dfrac{1+U_n+U_n^2}{U_n}-\dfrac{1}{U_n}=\dfrac{U_n(U_n+1)}{U_n}=U_n+1$

Or on a : $0\le U_n\le\dfrac{1}{n+1}$ alors $1\le U_n+1\le 1+\dfrac{1}{n+1}$ alors $1\le\dfrac{1}{U_{n+1}}-\dfrac{1}{U}\le$

b) $\forall k\in\mathbb{N}$, on a: $1\le\frac{1}{U_{k+1}}-\frac{1}{U_k}\le\frac{1}{k+1}+1$

$$\Rightarrow\sum_{k=0}^{n-1}1\le\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{U_{k+1}}-\frac{1}{U_k}\right)\le\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k+1}\right)\Rightarrow n\le\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{U_{k+1}}\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{U_k}\right)\le\sum_{k=0}^{n-1}1+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}$$

$$\Rightarrow n\le\left(\frac{1}{U_1}+\frac{1}{U_2}+\dots+\frac{1}{U_{n-1}}+\frac{1}{U_n}\right)-\left(\frac{1}{U_0}+\frac{1}{U_1}+\dots+\frac{1}{U_{n-2}}+\frac{1}{U_{n-1}}\right)\le n+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}$$

$$\Rightarrow n\le\frac{1}{U_n}-\frac{1}{U_0}\le n+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}\right)$$

On pose $k'=k+1$ on a k allons de $0\to n-1$ alors $k'=k+1$ allons de $1\to n$

Donc $n\le\frac{1}{U_n}-1\le n+\sum_{k'=1}^{n}\frac{1}{k'}$

c) Montrons que $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $n+1\le\frac{1}{U_n}\le 2n+1$?

On a d'après la question 3)b) $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $n\le\frac{1}{U_n}-1\le n+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

alors : $n+1\le\frac{1}{U_n}\le n+1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

Montrons que : $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\le n$?

$\forall n\in\mathbb{N}^*$; $k\in\{1,2,\dots,n\}$ on a $\frac{1}{k}\le 1\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\le\sum_{1}^{n}1\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\le n$

Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $n+1\le\frac{1}{U_n}\le n+1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\le 2n+1$

d) $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $V_n=U_n\sqrt{n}$

On a: $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $n+1\le\frac{1}{U_n}\le 2n+1$

$$\Rightarrow\frac{1}{2n+1}\le U_n\le\frac{1}{n+1}\Rightarrow\frac{\sqrt{n}}{2n+1}\le U_n\sqrt{n}\le\frac{\sqrt{n}}{n+1}\Rightarrow\frac{\sqrt{n}}{2n+1}\le V_n\le\frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

* $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{2n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(2\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}=0$ * $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}=0$

d'où V est convergente vers $\ell=0$

Exercice 4 On a : $U_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k}{n^2}\right)$; $n\in\mathbb{N}^*$

1) $\forall x\ge 0$; $1-\frac{x^2}{2}\le\cos x\le 1$

- on a : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\cos x\le 1$ en particulier $\forall x\ge 0$; $\cos x\le 1$
- on pose $f(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$

$\forall x\ge 0$; $f'(x)=-\sin x+x$, $f''(x)=1-\cos x\ge 0$

x	0 $+\infty$
$f''(x)$	$+$
$f'(x)$	$0\nearrow$

On a : $\begin{cases}x\ge 0\\ f'(x)\text{ croissante sur }[0,+\infty[\end{cases}$ alors $f'(x)\ge f'(0)\Rightarrow f'(x)\ge 0$

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0\nearrow$

On a : $\begin{cases}x\ge 0\\ f\text{ croissante sur }[0,+\infty[\end{cases}$ alors $f(x)\ge f(0)$; $\cos x-1+\frac{x^2}{2}\ge 0$

Alors $\cos x\ge 1-\frac{x^2}{2}$

Conclusion : $\forall x\ge 0$; $1-\frac{x^2}{2}\le\cos x\le 1$

2) ; Montrons par récurrence que P « $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ »

* Pour $n=1$: $\left.\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{1}k^2=1\\ \frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6}=1\end{array}\right\}\Rightarrow\sum_{k=1}^{1}k^2=\frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6}$ d'où P est vrai pour n = 1.

* Soit $p\in\mathbb{N}^*$; supposons que : $\sum_{k=1}^{p}k^2=\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$

Montrons que : $\sum_{k=1}^{p+1}k^2=\frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}$

* On a : $\sum_{k=1}^{p+1}k^2=\sum_{k=1}^{p}k^2+(p+1)^2=\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}+(p+1)^2=\frac{p(p+1)(2p+1)+6(p+1)^2}{6}$

$$=\frac{(p+1)[p(2p+1)+6(p+1)]}{6}=\frac{(p+1)(2p^2+7p+6)}{6}=\frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}$$

D'après le principe de raisonnement par récurrence, on a P est vraie $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

3) $\forall n\ge 1$; $1-\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^4}\le U_n\le 1$?

On a d'après 1) $\forall x\ge 0$: $1-\frac{x^2}{2}\le\cos x\le 1$ En particulier pour $x=\frac{k}{n^2}$ avec $k\in\mathbb{N}$ et $n\in\mathbb{N}^*$

On a : $1-\frac{k^2}{2n^4}\le\cos\left(\frac{k}{n^2}\right)\le 1$

Alors : $\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k^2}{2n^4}\right)\le\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k}{n^2}\right)\le\sum_{k=1}^{n}1$ Alors : $\sum_{k=1}^{n}1-\frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n}k^2\le nU_n\le\sum_{k=1}^{n}1$

Alors : $n-\frac{1}{2n^4}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\le nU_n\le n$ Alors : $1-\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^4}\le U_n\le 1$

4) on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $1-\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^4}\le U_n\le 1$

on a : $\lim_{n\to+\infty}1-\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^4}=\lim_{n\to+\infty}1-\frac{(n+1)}{n}\frac{(2n+1)}{n}\frac{1}{12n^2}=\lim_{n\to+\infty}1-\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{12n^2}$

$=1-1\times1\times0=1$

d'où $\lim_{n\to+\infty}U_n=1$

Prof Mr Ben Brahim | $4^{ème}$ Math

Lycée Pilote Nabeul | Série d'exercices N°6

Exercice 1 : Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{1}{2}]$ par $f(t) = tg(\frac{\pi}{2}t)$.

1) Montrer que pour tout $t \in [0, \frac{1}{2}]$, $\frac{\pi}{2} \le f'(t) \le \pi$.

2) En déduire que pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$, on a $\frac{\pi}{2}x \le tg(\frac{\pi}{2}x) \le \pi x$.

Exercice 2 : Soit g la fonction définie sur $[0, 2]$ par $g(x) = \sin\frac{\pi}{2}x$.

Montrer que pour tout $a \in [0, 2]$ et pour tout $b \in [0, 2]$, on a $\left|\sin\frac{\pi}{2}b - \sin\frac{\pi}{2}a\right| \le \frac{\pi}{2}|b-a|$.

Exercice 3: Soit la suite U définie par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \sqrt{3U_n + 4}$

1) Montrer que $\forall n \in IN$ on a $0 \le U_n < 4$.
2) Soit $f(x) = \sqrt{3x+4}$, $x \in [0,4]$ montrer que $|f'(x)| \le \frac{3}{4}$
3) Montrer que $\forall n \in IN, |U_{n+1} - 4| \le \frac{3}{4}|U_n - 4|$
4) En déduire que la suite U est convergente et calculer sa limite.

Exercice 4: Soit la suite U définie sur IN* par $U_n = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3}$.

1) Soit la fonction f définie sur IR* par $f(x) = \frac{1}{x^2}$ et soit $p \in IN^*$
   a) Montrer que si $x \in [p, p+1]$ alors $\frac{-2}{p^3} \le f'(x) \le \frac{-2}{(p+1)^3}$
   b) Déduire en utilisant le théorème des inégalités accroissements finis que :
   $\frac{-2}{p^3} \le \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{p^2} \le \frac{-2}{(p+1)^3}$
   c) Déduire que si $p \ge 2$ on a : $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{(p+1)^2}\right) \le \frac{1}{p^3} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(p-1)^2} - \frac{1}{p^2}\right)$
2) Montrer que pour tout entier $n \ge 2$ on a : $\frac{9}{8} - \frac{1}{2(n+1)^2} \le U_n \le \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}$
3) Montrer que la suite U est convergente vers un réel l tel que : $\frac{9}{8} \le l \le \frac{3}{2}$

Exercice 5 :

1) En utilisant le théorème des accroissement finis , montrer que $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ il existe un réel $c \in]0, x[$ tel que $\frac{tgx - x}{x} = tg^2(c)$.

2) Soit la fonction g définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $\begin{cases} g(x) = \frac{tgx - x}{x} & \text{si } x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\\ g(0) = 0 \end{cases}$

En déduire de 1) que g est dérivable à droite en 0 et calculer $g'_d(0)$.

Exercice 6

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\pi^2 x + \sqrt{1-x}}{|x|+1} & \text{si } x \le 1 \\ f(x) = \dfrac{1+\cos(\pi x)}{(x-1)^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

1/ a) Montrer alors que f est continue en 1 .
   b) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.
   c) Etudier la branche infinie de la courbe représentative de f au voisinage de $-\infty$

2/ a) On admet que f est strictement décroissante sur $I = [1,3]$. Montrer que l'équation $f(x) = 4x$ admet dans I une seule solution α et que $1 < \alpha < \frac{4}{3}$.
   b) Lequel des intervalles $I_1 = \left]1, \frac{7}{6}\right[$ et $I_2 = \left]\frac{7}{6}, \frac{4}{3}\right[$ contient le réel α.

Exercice 7 :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$.

Soit Cf la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1)
   a) Dresser le tableau de variation de g.
   b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et vérifier que $\alpha \in]0,1[$.
   c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0, +\infty[$.
2) Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{x}}$; $x \in]0, +\infty[$ et Dresser la tableau de variation de f .
   a) Montrer que la droite $\Delta : y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote à C.
   b) Etudier la position relative de Cf et Δ.
   c) Tracer Cf (on prendra : $\alpha \simeq 0,5$).

Exercice 8 :

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

1) On donne la fonction f définie par $f(x) = \sin(\frac{x}{2})$, d'après le théorème des accroissements finis il existe au moins un réel $c \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[$ tel que

a) $\cos\left(\frac{c}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ b) $\cos\left(\frac{c}{2}\right) = 0$ c) $\cos\left(\frac{c}{2}\right) = \frac{3}{\pi}$ d) $\cos\left(\frac{c}{2}\right) = -\frac{3}{\pi}$

2) Soit z et z' deux nombres complexes tels que $|z| = 3$ et $z' = z + \frac{1}{\bar{z}}$ alors

a) $|z'| = \frac{8}{3}$ b) $|z'| = \frac{4}{3}$ c) $|z'| = 3$ d) $|z'| = \frac{10}{3}$

d'où $[OI)$ est ma bissectrice de $(\overline{OM'}, \overline{OM})$

Correction **Exercice 11 :**

$U_0 = 1 \quad ; \; V_0 = 2$

$U_{n+1} = \dfrac{2U_nV_n}{V_n + U_n} \; ; \; V_{n+1} = \dfrac{U_n + V_n}{2}$

1) P " $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_n < V_n$ "

*On a: $U_0 = 1 \; ; V_0 = 2 \;\; \Rightarrow 0 < U_0 < V_0$ donc P est vrai pour n = 0

* Soit $p \in \mathbb{N}$; supposons que : $0 < U_p < V_p$; montrons que : $0 < U_{p+1} < V_{p+1}$?

on a : $U_{p+1} = \dfrac{2U_pV_p}{U_p + V_p} > 0$

on a : $V_{p+1} - U_{p+1} = \dfrac{U_p + V_p}{2} - \dfrac{2V_pU_p}{U_p + V_p} = \dfrac{(U_p + V_p)^2 - 4U_pV_p}{2(U_p + V_p)} = \dfrac{(U_p - V_p)^2}{2(U_p + V_p)} > 0$

d'où : $V_{p+1} > U_{p+1}$ d'où : $0 < U_{p+1} < V_{p+1}$

D'après le principe de raisonnement par récurrence, P est vrai $\forall n \in \mathbb{N}$.

(Rappel : $\boxed{(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2}$ $\qquad \boxed{(a-b)^2 + 4ab = (a+b)^2}$)

2)

a) Montrons que U croissante et V décroissante.

$\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} - U_n = \dfrac{2U_nV_n}{U_n + V_n} - U_n = \dfrac{2U_nV_n - U_n(U_n + V_n)}{U_n + V_n} = \dfrac{-U_n^2 + U_nV_n}{U_n + V_n}$

$= \dfrac{U_n(V_n - U_n) >}{U_n + V_n >} > 0$

d'où $U_{n+1} > U_n$ d'où la suite U est croissante.

$\forall n \in \mathbb{N} \; ; V_{n+1} - V_n = \dfrac{U_n + V_n}{2} - V_n = \dfrac{U_n - V_n}{2} < 0$

d'où V est décroissante.

b) * On a : V est décroissante et minorée par 0 alors V converge vers une limite ℓ.

* On a : V est décroissante alors : $\forall n \in \mathbb{N} \; ; V_n \le V_0 \Rightarrow V_n \le 2$

d'où : $0 < U_n < V_n < 2$ d'où U est majorée par 2.

Comme U est croissante alors U converge vers un réel ℓ'.

Montrons que $\ell = \ell'$

On a : $\forall n \in \mathbb{N} \; ; V_{n+1} = \dfrac{U_n + V_n}{2}$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} V_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{U_n + V_n}{2}$

Alors $\ell = \dfrac{\ell' + \ell}{2} \Leftrightarrow 2\ell = \ell' + \ell \Leftrightarrow \ell = \ell'$.

3) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N} \; ; U_nV_n = 2$?

a) P " $\forall n \in \mathbb{N}; U_nV_n = 2$ "

pour n = 0 $\Rightarrow V_0U_0 = 1 \times 2 = 2 \Rightarrow$ P est vraie pour n = 0.

Soit $p \in \mathbb{N}$: supposons que P est vraie pour p.

Montrons que : $U_{p+1}V_{p+1} = 2$.

On a : $U_{p+1}V_{p+1} = \dfrac{2U_pV_p}{U_p + V_p} \times \dfrac{U_p + V_p}{2} = U_pV_p = 2$

D'après le principe de résonnement par récurrence, P est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) On a :

$$\left.\begin{array}{l} U_nV_n = 2 \\ U_n \;\; \text{converge vers } \ell \\ V_n \;\; \text{converge vers } \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} U_nV_n = 2 \Rightarrow \ell \times \ell = 2 \Rightarrow \ell^2 = 2 \Rightarrow \ell = \sqrt{2} \text{ ou}$$

$\ell = -\sqrt{2}$

or $U_n > 0 \Rightarrow \ell \ge 0 \Rightarrow \ell = \sqrt{2}$

Ex1 :

$f(t) = tg\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

1) f est dérivable sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

$f'(t) = \frac{\pi}{2}\left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)$

on a : $0 \leq t \leq \frac{1}{2} \iff 0 \leq \frac{\pi}{2}t \leq \frac{\pi}{4}$

$\iff \underbrace{\tan 0}_{0} \leq \tan \frac{\pi}{2}t \leq \tan\frac{\pi}{4} = 1$

$\iff 0 \leq \tan^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) \leq 1$

$\iff 1 \leq 1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) \leq 2$

$\iff \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}\left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) \leq \pi$

$\iff \frac{\pi}{2} \leq f'(t) \leq \pi.$

2) on a : $x \in \left]0 ; \frac{1}{2}\right]$

f est continue sur $[0, x]$

f est dérivable sur $]0, x[$

$\forall t \in]0, x[\; ; \frac{\pi}{2} \leq f'(t) \leq \pi$

D'après T.I.A.F1.

Alors $\frac{\pi}{2}(x - 0) \leq f(x) - f(0) \leq \pi(x - 0)$

$\frac{\pi}{2}x \leq \tan\frac{\pi}{2}x \leq \pi x$

vérification pour 0 :

$\underbrace{\frac{\pi}{2}x}_{0} \leq \underbrace{\tan\frac{\pi}{2}x}_{0} \leq \underbrace{\pi x}_{0}$ est vrai

conclusion :

$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$; on a : $\frac{\pi}{2}x \leq \tan\frac{\pi}{2}x \leq \pi x$.

Ex 2 :

$g(x) = \sin \frac{\pi}{2} x$

g est dérivable sur $[0,2]$

$g'(x) = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} x$

on a $x \in [0,2]$

g est dérivable sur $[0,2]$

$\forall x \in [0,2] ; |g'(x)| = \frac{\pi}{2} \underbrace{\left|\cos \frac{\pi}{2} x\right|}_{\leq 1} \leq \frac{\pi}{2}$

D'après T.I.A.F 2 :

Alors $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$|f(b) - f(a)| \leq \frac{\pi}{2} |b-a|$

$\Leftrightarrow \left|\sin \frac{\pi}{2} b - \sin \frac{\pi}{2} a\right| \leq \frac{\pi}{2} |b-a|$

Ex 3 :

1) on a : pour $n=0$ $\quad 0 \leq U_0 = 0 \leq 4$ vraie

supposons que $0 \leq U_n \leq 4$ et montrons que $0 \leq U_{n+1} \leq 4$

on a : $0 \leq U_n \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq 3U_n \leq 12$

$\Leftrightarrow 4 \leq 3U_n + 4 \leq 16$

$0 < 2 = \sqrt{4} \leq \sqrt{3U_n+4} \leq \sqrt{16} = 4$

$0 \leq U_{n+1} \leq 4$

d'où par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$0 \leq U_n \leq 4$.

2) $f(x) = \sqrt{3x+4}$

f est dérivable sur $[0,4]$

$f'(x) = \frac{+3}{2\sqrt{3x+4}}$

on a : $0 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow 2 \leq \sqrt{3x+4} \leq 4$

$\Leftrightarrow 4 \leq 2\sqrt{3x+4} \leq 8$

$\Leftrightarrow \frac{1}{8} \leq \frac{1}{2\sqrt{3x+4}} \leq \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{8} \leq \frac{3}{2\sqrt{3x+4}} \leq \frac{3}{4}$

②

3) Soit $f(u_n) = u_{n+1}$.

f est dérivable sur $[0,4]$

$\forall x \in [0,4]$; $f'(x) \leq \frac{3}{4}$; $u_n \in [0,4]$; $4 \in [0,4]$

D'après T.I.A.F.L :

Alors $\forall x \in [0,4]$ on a :

$$|f(u_n) - f(4)| \leq \frac{3}{4}|u_n - 4|$$

$$\Leftrightarrow |u_{n+1} - 4| \leq \frac{3}{4}|u_n - 4|$$

4) on a $|u_{n+1} - 4| \leq \frac{3}{4}|u_n - 4|$

alors $0 < |u_n - 4| \leq \frac{3}{4}|\cancel{u_{n-1}} - 4|$

$0 < |\cancel{u_{n-1} - 4}| \leq \frac{3}{4}|\cancel{u_{n-2} - 4}|$

$\vdots$

$0 < |\cancel{u_1 - 4}| \leq \frac{3}{4}|u_0 - 4|$

Après multiplication terme par terme et simplification on obtient :

$$|u_n - 4| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - 4|$$

$$\Leftrightarrow |u_n - 4| \leq 4\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} 4\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$

Exercice n°4 :

1) $f(x) = \frac{1}{x^2}$; $x \in \mathbb{R}^*$; $p \in \mathbb{N}^*$

a) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2)^2} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$$

$\forall x \in [p; p+1]$; on $p \leq x \leq p+1 \Leftrightarrow p^3 \leq x^3 \leq (p+1)^3$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{p^3} \geq \frac{1}{x^3} \geq \frac{1}{(p+1)^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{p^3} \leq f'(x) \leq \frac{-2}{(p+1)^3}$$

b) f est continue sur $[p;p+1]$

f est dérivable sur $]p;p+1[$

$\forall x \in]p;p+1[\; ; \; \frac{-2}{p^3} < f'(x) \leq \frac{-2}{(p+1)^3}$

D'après T.I.A.F 1:

on a: $\frac{-2}{p^3}\left(\underbrace{(p+1)-p}_{1}\right) \leq f(p+1)-f(p) \leq \frac{-2}{(p+1)^3}\left(\underbrace{(p+1)-p}_{1}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{p^3} \leq \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{p^2} \leq \frac{-2}{(p+1)^3}$$

c) $\forall p \geq 2$; on a: $\frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{p^2} \geq \frac{-2}{p^3}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{p^2} - \frac{1}{(p+1)^2} \leq \frac{2}{p^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{(p+1)^2}\right) \leq \frac{1}{p^3} \qquad (1)$$

si $p \geq 1$ on a: $\frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{p^2} \leq \frac{-2}{(p+1)^3}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{(p+1)^3} \leq \frac{1}{p^2} - \frac{1}{(p+1)^2}$ on pose $k=p+1 \Rightarrow p=k-1$

$$\Rightarrow \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{k^2}\right) \qquad (2)$$

d'après (1) et (2), $\forall p \geq 2$ on a:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{(p+1)^2}\right) \leq \frac{1}{p^3} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(p-1)^2} - \frac{1}{p^2}\right)$$

2) pour $n \geq 2$; on a: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{(p+1)^2}\right) \leq \frac{1}{p^3} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(p-1)^2} - \frac{1}{p^2}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p^2} - \sum_{p=2}^{n}\frac{1}{(p+1)^2}\right) \leq \sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p^3} \leq \frac{1}{2}\left(\sum_{p=2}^{n}\frac{1}{(p-1)^2} - \sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \frac{1}{n^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots \frac{1}{(n+1)^2}\right) \leq u_n - 1 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{2^2} + \cdots\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{(n+1)^2}\right) + 1 \leq u_n \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + 1$$

$$\frac{9}{8} + \frac{1}{2(n+1)^2} \leq u_n \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{2n^2}$$

3)

3) $u_{n+1} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^3} > 0$

~~(u_n)~~

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^3} > 0 \Rightarrow (u_n)$ est croissante.

on a : $u_n \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow (u_n)$ est majorée par $\frac{3}{2}$

donc (u_n) est croissante et majorée par $\frac{3}{2}$

$\Rightarrow (u_n)$ converge vers un réel l.

on a : $\frac{9}{8} - \frac{1}{2(n+1)^2} \leq u_n \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{9}{8} - \frac{1}{2(n+1)^2} = \frac{9}{8} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2} = \frac{3}{2} \end{array}\right\} \text{ alors } \frac{9}{8} \leq l \leq \frac{3}{2}.$$

Exercice n°5 :

Soit $f(x) = \tan x - x$

f est dérivable sur $[0; \frac{\pi}{2}[$

$f'(x) = \tan^2(x)$

on a : $x \in [0; \frac{\pi}{2}[$

f est continue sur $[0, x]$

f est dérivable sur $]0, x[$

D'après T.A.F il $\exists\ c \in]0, x[$

alors : $f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0)$

$\Rightarrow \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c)$

$\frac{\tan x - x}{x} = \tan^2(c)$

2) $\begin{cases} g(x) = \dfrac{\tan x - x}{x} & \text{si } x \in]0, \frac{\pi}{2}[\\ g(0) = 0 \end{cases}$

$$\lim_{0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{0^+} \frac{\frac{\tan - x}{x}}{x}$$

$$= \lim_{0^+} \frac{\tan^2(c)}{x} = \frac{0}{0} \text{ F.I}$$ (car $0 \leq c$; si $x \to 0^+ \Rightarrow c$

on a : $0 \leq c \leq x$

$\Rightarrow \tan 0 \leq \tan(c) \leq \tan x$

$\Rightarrow 0 \leq \tan^2(c) \leq \tan^2(x)$

$\Rightarrow 0 \leq \dfrac{\tan^2(c)}{x} \leq \dfrac{\tan^2(x)}{x}$

or $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\tan^2 x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \underbrace{\dfrac{\tan x}{x}}_{1} \cdot \underbrace{\tan x}_{0} = 0$

donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\tan^2(c)}{x} = 0$

Alors $\lim \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0 = g'_d(0)$

d'où g est dérivable à droite en 0

Exercice n°6 :

1) a) $f(1) = \frac{\pi^2}{2}$

$\lim\limits_{1^-} f(x) = \lim\limits_{1^-} \frac{\pi^2 x + \sqrt{1-x}}{|x|+1} = \frac{\pi^2}{2} = f(1)$

$\lim\limits_{1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1+\cos(\pi x)}{(x-1)^2}$

on pose $h = x - 1 \to x = h + 1$

$x \to 1$ éq $h \to 0$

$= \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{1 + \cos(\pi(h+1))}{(h+1-1)^2}$

$= \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{1+\cos(\pi h + \pi)}{h^2}$

$= \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{1 - \cos \pi h}{h^2} = \frac{\pi^2}{2}$

d'où $\lim\limits_{1^+} f(x) = \frac{\pi^2}{2} = f(1)$

d'où f est continue en 1.

b) $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \frac{1+\cos(\pi x)}{(x-1)^2}$

En effet. $\forall x \geq 1$; $-1 \leq \cos(\pi x) \leq 1$

$0 \leq 1 + \cos(\pi x) \leq 2$

$0 \leq f(x) \leq \frac{2}{(x-1)^2}$

$\lim\limits_{+\infty} \frac{2}{(x-1)^2} = 0$

d'où $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0$

$\Rightarrow$ la droite Δ d'éq $y = 0$ est une asymptote horizontal au voisinage de $+\infty$ de $\mathcal{C}_f$.

c) $\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} \frac{\pi^2 x + \sqrt{1-x}}{|x|+1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\pi^2 x + \sqrt{1-x}}{-x+1}$ on pose $X = -x$

$x \to -\infty$ éq $X \to +\infty$

$= \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{-\pi^2 X + \sqrt{1+X}}{X+1} = \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{X\left(-\pi^2 + \sqrt{\frac{1}{X} + \frac{1}{X}}\right)}{X\left(1 + \frac{1}{X}\right)} = -\pi^2$

d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f = -\pi^2$

$\Rightarrow \mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale $y = -\pi^2$ au voisinage de $-\infty$.

2/a) On a : $f(x) = 4x$

f est strictement décroissante sur $I = [1, 3]$

$f(x) = 4x \iff g(x) = f(x) - 4(x) = 0$

$\iff g(x) = 0$ avec $g(x) = f(x) - 4x$

- on a montré que g est continue sur $]1, \frac{4}{3}]$

on : g continue en 1^+

$\Rightarrow g$ est continue sur $[1, \frac{4}{3}]$

$g(1) = \frac{\pi^2}{2} - 4 > 0$

$g(\frac{4}{3}) = f(\frac{4}{3}) - \frac{16}{3} = \frac{-5}{6} < 0$

$g(1) \cdot g(\frac{4}{3}) < 0$

D'après le théorème de valeur intermédiaire on a

l'éq $g(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in [1; \frac{4}{3}]$

- on a montré que g est dérivable sur $]1; \frac{4}{3}[$

$\forall x \in]1; \frac{3}{4}[$; on a : $g'(x) = \underbrace{f'(x)}_{<0} - 4 < 0$

d'où g est strictement décroissante sur $]1; \frac{4}{3}[$

alors α est unique.

Exercice n° :

$g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$

1) a) $D_g = D_{g'} = \mathbb{R}$

$g'(x) = 6x^2 + 2x$

$6x^2 + 2x = 0 \iff x = 0$ ou $x = \frac{-1}{3}$

x	$-\infty$		$-1/3$		0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0		$+$		
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-0,9$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

b) sur $]-\infty; 0]$; C_f admet maximum $f(-\frac{1}{3}) = -0,9$

$\Rightarrow \forall x \in]-\infty; 0]$; $f(x) \leq -0,9$

l'éq $g(x) = 0$ n'admet aucune solution sur $]-\infty; 0]$

- g est $\nearrow$ sur $[0, +\infty[$

$\Rightarrow g([0, +\infty[) = [-1, +\infty[$

d'où l'éq $g(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in [0; +\infty[$

on g est strictement $\nearrow$ sur $[0;+\infty[$ alors α est unique que

g continue sur $[0,+\infty[$
$g(0).\,g(1) = (-1)\times 2 = -2 < 0$ } d'après théorème des valeurs intermédiaires : $0<\alpha<1$

on $\alpha \in]0;1[$

c)

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2) $f(x) = \sqrt{x^2+x+\frac{1}{x}}$ $\quad D_f = D_{f'} =]0;+\infty[$

$$f'(x) = \frac{2x+1-\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{x^2+x+\frac{1}{x}}} = \frac{2x^3+x^2-1}{2x^2\sqrt{x^2+x+\frac{1}{x}}}$$ prend le signe de $g(x)$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

a) $$\lim_{x\to+\infty} f(x) - \left(x+\frac{1}{2}\right) = \lim_{+\infty} \sqrt{x^2+x+\frac{1}{x}} - \left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{\cancel{x^2}+x+\frac{1}{x}-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x+\frac{1}{x}}+x} - \frac{1}{2}$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}+1\right)} - \frac{1}{2} = 0$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{C}_f$ admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique de droite d'éq D : $y = x+\frac{1}{2}$

b) La position relative de $\mathcal{C}_f$ et Δ est donné par le signe de $f(x)-y$

$\forall x > 0$; $f(x)-y = \sqrt{x^2+x+\frac{1}{x}} - \left(x+\frac{1}{2}\right) =$

$$= \frac{x^2+x+\frac{1}{x}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\underbrace{\sqrt{x^2+x+\frac{1}{x}}+x+\frac{1}{2}}_{>0}} = \frac{N-x}{D>0}$$

math-pilote.blogspot.com

x	0		4		$+\infty$
$f(x)-y$	||	+	0	−	
position relative de C_f et Δ		C_f au dessus de Δ	$C_f \cap \Delta$	C_f au dessous de Δ	

Exercice Lebron

1) $f(1)=1$; $f'(1)=0$; $f'(3)=0$

2) $f'(x)>0 \iff]-\infty;1[\cup]3;+\infty[$

3) $\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h-0} = f'(2) = 0$

$f'(2) = \frac{-3-0}{3-2} = -3$

4) D'après C_f :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$		↗		↘		↗	
$f'(x)$		+	0	−	0	+	

$C_{f'}$ correspond la courbe de b.

5) a) $g(x) = f(2\cos x)$; calculer $g'(0)$

on a : $g(x) = f(u(x))$ avec $u(x) = 2\cos x$

on a : u est dérivable en 0 ; f est dériv en $u(0)=2$) alors $g = f\circ u$ est dérivable en 0

$g'(0) = u'(0) \cdot f'(u(0)) = -2\sin(0)\, f'(2)$

$= -2 \times 0 \times -3 = 0$

b) $h(x) = f(x^2+1)$; calculer $h'(x)$

on a : $h(x) = f(v(x))$ avec $v(x) = x^2+1$

on a : { v est dérivable sur $I=\mathbb{R}$; f est dériv sur $\mathbb{R}$ en particulier en $v(x)$

$\Rightarrow h = f\circ v$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$; $h'(x) = (f(v(x)))' = v'(x) \cdot f'(v(x))$

n ... $f'(x^2+1)$

$(u'(2x)) ' = u'(2x) \sqrt{\ldots}$

5) a) Soit $g(x) = f(2\cos x)$

calculer $g'(0)$

$g'(x) = f'(2\cos x) \cdot (2\sin x)$

$\Rightarrow g'(0) =$

Rappel.

si f est dériv sur I + g est dériv sur $f(I)$ $\Rightarrow h = g\circ f$ est dériv sur I

correction: on a: $g(x) = f(u(x))$ avec $u = 2\cos x$

on a: u est dérivable en 0 + f est dériv en $u(0) = 2$ } alors $g = f\circ u$ est dérivable en 0

$g'(0) = u'(0) \cdot f'(u(0)) = -2\sin(0) \cdot f'(2)$

$= -2 \times 0 \times -3$

$= 0$

6) $h(x) = f(x^2+1)$

calculer $h'(1)$

on a: $h(x) = f(v(x))$ avec $v(x) = x^2+1$

on a: { v est dérivable sur $I = \mathbb{R}$; f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier en $v(\mathbb{R})$.

$\Rightarrow h = f\circ v$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$; $h'(x) = (f(v(x)))'$

$= v'(x) \cdot f'(v(x))$

$= 2x \cdot f'(x^2+1)$

$\Rightarrow h'(1) = 2\times 1 \cdot f'(2) = 2\times 1\times(-3) = -6$.

Lycée Pilote Nabeul	Complement exercices (Suites réelles)

Exercice 1 :

Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}$

1) Montrer que quelque soit $p \in \mathbb{N}^*$ on a : $\frac{1}{(p+1)^2} \le \frac{1}{p}-\frac{1}{p+1} \le \frac{1}{p^2}$

2) En déduire que quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $1-\frac{1}{n+1} \le U_n \le 2-\frac{1}{n+1}$

3) Montrer que la suite U est convergente vers un $l \in [1,2]$

Exercice 2 : (6 points)

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x)=\begin{cases} \frac{\sin(\pi x^2)}{x}-x-4 & \text{si } x \in]-\infty,-1[\\ x^3+3(n+1)x+1 & \text{si } x \in [-1,0] \\ x-2\sqrt{x+1} & \text{si } x \in]0,+\infty[\end{cases}$

On désigne par Cn sa courbe représentative $(n \in \mathbb{N})$

1) a) Déterminer l'entier n pour que f_n soit continue en -1.

b) Pour la valeur de n obtenue, Etudier la continuité de f_n sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$ puis étudier les branches infinis de C_n.

3) a) Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ possède sur $]-1,0[$ une unique solution α_n $(n \in \mathbb{N})$

b) Prouver que la suite (α_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (α_n) est convergente.

d) Vérifier que $\alpha_n = \frac{-1}{\alpha_n^2+3(n+1)}$ en déduire $\lim_{x\to+\infty} \alpha_n$.

Exercice 3 :

Soit (U_n) la suite définie par $U_0=2$ et $U_{n+1}=U_n+\frac{2}{U_n}$.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n \ge 2$.

2) Montrer que (U_n) est croissante puis $U_n \to +\infty$.

3) Montrer que l'on a : $4 \le U_{n+1}^2-U_n^2 \le 4+U_{n+1}-U_n$, en déduire que : $4n \le U_n^2-4 \le 4n+U_n-2$.

4) Montrer alors que : $1-\frac{1}{U_n}-\frac{2}{U_n^2} \le \frac{4n}{U_n^2} \le 1-\frac{4}{U_n^2}$.

5) Soit $V_n=\frac{U_n}{\sqrt{n}}$; $n \ge 1$, étudier la convergente de (V_n) et préciser sa limite.

math-pilote.blogspot.com

Exercice DC1 (2008-2009)

Exercice 2 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=\frac{\sin(x^2)}{x} & si\ x<0 \\ f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} & si\ x \ge 0 \end{cases}$ On désigne par ζ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j})$

1/ a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

b) Etudier les branches infinies de ζ

c) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

d) Montrer que pour tout réel x de $[0,1]$ on a : $f(x) \le \frac{1}{\sqrt{2}}x$

2/ Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0=\frac{1}{2}$ et $U_{n+1}=f(U_n)$; $\forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $0<U_n<1$.

b) Prouver que la suite (U_n) est décroissante et qu'elle est convergente vers un réel qu'on calculera

c) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $U_{n+1} \le \frac{1}{\sqrt{2}}U_n$ puis retrouver la limite de U_n

Solution

On a : $\begin{cases} f(x)=\frac{\sin(x^2)}{x} & si\ x<0 \\ f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} & si\ x \ge 0 \end{cases}$

1)

a) * $x \longrightarrow x^2 \xrightarrow{\sin} \sin(x^2)$

La fonction $x \to x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \to \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Alors la fonction $x \to \sin(x^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty,0[$.

La fonction $x \to x$ est continue et ne s'annule pas sur $]-\infty,0[$.

Alors la fonction $x \to \frac{\sin(x^2)}{x}$ est continue sur $]-\infty,0[$ alors f est continue sur $]-\infty,0[$

* La fonction $x \to 1+x^2$ est continue positive sur $[0,+\infty[$.

Alors la fonction $x \to \sqrt{1+x^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$. de plus elle ne s'annule pas

D'où la fonction $x \to \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$ est continue sur $[0,+\infty[$. alors f est continue sur $[0,+\infty[$

* $f(0)=0$

$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{\sin(x^2)}{x} = \lim_{x\to0^-} x\frac{\sin(x^2)}{(x^2)} = 0\times1 = 0$

D'où $\lim_{x\to0^-} f(x) = 0 = f(0)$ D'où f est continue à gauche en 0.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 - x^2(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}\left(x^2 + x\sqrt{1+x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{\sqrt{1+x^2}\left(x^2 + x\sqrt{1+x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)} = 0$$

D'où D : $y = x$ est asymptote oblique à Cf au voisinage de $+\infty$.

* $\forall x < 0 : -1 \leq \sin(x^2) \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x^2)}{x} \leq -\frac{1}{x}$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{1}{x} = 0$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

Alors la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à Cf au voisinage de $-\infty$.

c) f est dérivable sur $[0,+\infty[$,

$$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{(x^2)'\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x^2}'\,x^2}{\sqrt{1+x^2}^2} = \frac{2x\sqrt{1+x^2} - \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}x^2}{1+x^2}$$

$$= \frac{2x(1+x^2) - x^3}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^3 + 2x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} > 0$$

D'où f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

d) $\forall x \in [0,1]$,

$$(f(x))^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)^2 = \frac{x^4}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} = \frac{2x^4 - x^2(1+x^2)}{2(1+x^2)} = \frac{x^4 - x^2}{2(1+x^2)} = \frac{x^2(x^2-1)}{2(1+x^2)} \leq 0$$

D'où $f^2(x) \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)^2$ et comme $f(x) \geq 0, \frac{1}{\sqrt{2}}x \geq 0$ alors $f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}x$.

2) $U_0 = \frac{1}{2}$; $U_{n+1} = f(U_n), n \in \mathbb{N}$.

a) P "$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_n < 1$"

On a : $U_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < U_0 < 1$ alors P est vraie pour $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que : $0 < U_n < 1$, montrons que : $0 < U_{n+1} < 1$.

On a : $\left.\begin{array}{l} 0 < U_n < 1 \\ f \text{ est } \nearrow \text{ sur } [0,+\infty[\end{array}\right\}$ alors $f(0) < f(U_n) < f(1) \Rightarrow 0 < U_{n+1} < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$

D'après le principe de raisonnement par récurrence P est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) On a : $\forall x \in [0,1]$; $f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}x$

En particulier pour $x = U_n$, on a : $f(U_n) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}U_n \Rightarrow U_{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}U_n \leq U_n$.

D'où (U_n) est décroissante.

- on a : (U_n) est décroissante et minorée par 0 alors (U_n) converge vers un réel ℓ.
- f est continue sur $\mathbb{R}_+$ en particulier en ℓ (car $0 < U_n < 1$ $\Rightarrow 0 \leq \ell \leq 1 \Rightarrow \ell \in [0,+\infty[$)

D'où $f(\ell) = \ell$ d'où $\frac{\ell^2}{\sqrt{1+\ell^2}} = \ell$

$\Rightarrow \ell^2 = \ell\sqrt{1+\ell^2} \Rightarrow \ell^4 = \ell^2(1+\ell^2) \Rightarrow \ell^4 - \ell^2(1+\ell^2) = 0 \Rightarrow \ell^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\ell = 0}$.

c) On a : d'après 1) b) $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}U_n$.

Alors $0 < U_n \leq \frac{1}{\sqrt{2}}U_{n-1}$

$0 < U_{n-1} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}U_{n-2}$

$0 < U_1 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}U_0$

Après multiplication membre à membre et simplification on obtient

$0 < U_n \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n U_0$

D'où $0 < U_n < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

Comme $\lim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$ car $-1 < q = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.