❄ Suites réelles ❄
❄ Série N°1 ❄

❄ Bac Maths ❄ Lycée pilote Bourguiba ❄ 2020/2021 ❄

Prof : ✍ Masmoudi Radhouane ✍

Exercice 1 :

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{3}{2} \\ U_{n+1} = (U_n - 1)^2 + 1, \text{ pour tout } n \in IN \end{cases}$

1°) Calculer U_1 et U_2.

2°) a) Montrer que pour tout $n \in IN$: $1 \le U_n \le \dfrac{3}{2}$.

b) Etudier la monotonie de (U_n).

c) En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

3°) a) Montrer que pour tout $n \in IN$: $0 \le U_{n+1} - 1 \le \dfrac{1}{2}(U_n - 1)$.

b) Déduire que pour tout $n \in IN$: $U_n - 1 \le \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

c) Retrouver alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice 2 :

Soit la suite réelle (u_n) définie sur IR par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}} \end{cases}$

1°) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in$ IN, on a : $0 \le u_n \le 1$.

b) Montrer que pour tout $n \in$ IN, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

c) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2°) Pour tout $n \in$ IN, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n^2}$.

a) Montrer que la suite v est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
b) Exprimer v_n en fonction de n puis retrouver u_n en fonction de n.

3°) On pose pour tout $n \in$ IN, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

a) Calculer S_0, S_1 et S_2.

b) Montrer que pour tout $k \in$ IN, $\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1} \le \dfrac{1}{2\sqrt{k+1}}$.

c) En déduire que pour tout $n \in$ IN, $S_n \ge 2\left(\sqrt{n+2} - 1\right)$ puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

Exercice 3 :

Soit la fonction *f* définie sur $[0,1]$ par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} & si \quad x\in\,]0,1] \\ f(0)=0 \end{cases}$

On donne ci-contre le tableau de variation de *f*

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}-1$

Soit U la suite définie sur IN par : $U_0=1$ et $U_{n+1}=f(U_n)$

1°) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $0<U_n\leq 1$

2°) a) Montrer que pour tout $n\in$ IN on a : $U_{n+1}\leq \frac{1}{2}U_n$

b) En déduire que U est décroissante et que $U_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Calculer la limite de la suite U.

Exercice 4 :

On represente ci-contre la courbe (C_f) d'une fonction *f* et la droite $D: y=x$.

1°) Utiliser le graphique ci-dessous pour justifier la proposition suivante :
$f(x)\geq x$ pour $x\in[1,7]$.

2°) Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=f(u_n),\text{ pour tout } n\in IN \end{cases}$.

Donner u_1, u_2, u_3 et u_4. Que peut-on dire da la suite (u_n) ?

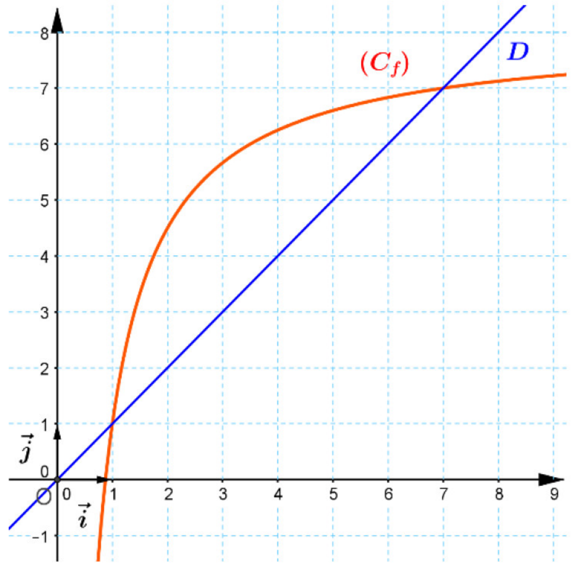
3°) Soit (v_n) la suite définie par : $\begin{cases} v_0=2 \\ v_{n+1}=f(v_n),\text{ pour tout } n\in IN \end{cases}$.

a) Placer sur l'axe des abscisses les points v_1, v_2 et v_3.

b) Montrer par récurrence que pour tout $n\in IN$ on a : $1\leq v_n\leq 7$.

c) Montrer que (v_n) est croissante.

d) En déduire que (v_n) est convergente et calculer sa limite.



Exercice 5 :

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \ ; \ U_1 = 1 \\ U_{n+2} = \frac{2}{3}U_{n+1} - \frac{1}{9}U_n, \text{ pour tout } n \in IN \end{cases}$

Soient (V_n) et (W_n) deux suites définie sur IN par : $V_n = U_{n+1} - \frac{1}{3}U_n$ et $W_n = 3^n U_n$.

1°) Montrer que (V_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison, puis déterminer V_n en fonction de n.

2°) Montrer que (W_n) est une suite arithmétique.

3°) Déterminer l'expression de U_n en fonction de n.

4°) a) Montrer que pour tout entier naturel $n \in IN^*$ on a : $0 < U_{n+1} \leq \frac{2}{3}U_n$.

b) Déduire que pour tout entier naturel $n \in IN^*$: $0 < U_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

c) Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice 6 :

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{2 - u_n^2}}, \text{ pour tout } n \in IN \end{cases}$.

1°) Montrer que pour tout $n \in IN$, on a : $0 \leq u_n \leq 1$.

2°) Montrer que (u_n) est décroissante, en déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

3°) a) Montrer que pour tout $n \in IN$, on a : $u_{n+1} \leq \frac{2\sqrt{7}}{7} u_n$. En déduire que pour tout $n \in IN$, on a :

$u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{7}}{7}\right)^n$.

b) Retrouver alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4°) Soit (S_n) la suite réelle définie sur IN par : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

a) Montrer que (S_n) est majorée.

b) En déduire qu'elle est convergente.

Exercice 7 :

Soit (u_n) la suite définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{(1 + u_n)^2}{4u_n}, \quad \text{pour tout n} \in \text{IN} \end{cases}$

1°) a) Montrer que pour tout $n \in \mathrm{IN}$, on a : $1 < u_n \leq 3$

b) Étudier la monotonie de la suite (u_n). En déduire qu'elle est convergente et donner sa limite.

2°) a) Montrer que pour tout $n \in \mathrm{IN}$, on a : $0 < u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{6}(u_n - 1)$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathrm{IN}$, on a : $0 < u_n - 1 \leq 2\left(\frac{1}{6}\right)^n$, puis retrouver la limite de (u_n)

3°) Soit $n \in \mathrm{IN}^*$, on pose : $S_n = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} u_k$; $v_n = 3^n(u_n - 1)$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$.

a) Encadrer S_n, en déduire que (S_n) est convergente et donner sa limite.

b) Calculer la limite de (v_n).

c) Montrer que pour tout $n \in \mathrm{IN}$, on a : $0 < T_n \leq 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

d) Montrer que (T_n) est convergente vers un réel L et que $L \in [0,2]$.

Exercice 8 :

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par : $a_0 = 3$, $b_0 = 1$ et pour tout entier naturel n on a :

$a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n + 3}{3}$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n + 3}{3}$. On pose $u_n = a_n - b_n$

1°) a) Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

b) En déduire la limite de (u_n)

2°) On pose , pour $n \in IN^*$, $v_n = \frac{a_n + b_n}{n}$

a) Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a : $v_n \geq 2$.

b) Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a : $v_{n+1} = v_n + \frac{2 - v_n}{n+1}$.

c) En déduire que (v_n) converge vers un réel $\mathscr{L} > 0$.

3°) Exprimer alors a_n et b_n en fonction de u_n , v_n et n puis déterminer les limites des suites (a_n) et (b_n).

Exercice 9 :

Soit (u_n) la suite réelle définie sur IN par : $u_0 = \frac{1}{4}$ et $u_{n+1} = u_n\left(1 - \sqrt{u_n}\right)^2$

1°) a) Montrer que pour tout $n \in IN$ on a : $0 < u_n < 1$.

b) Montrer que (u_n) est décroissante.

c) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2°) Pour tout $n \in IN$; On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

a) Montrer que pour tout $k \in IN$, $u_k = \sqrt{u_k} - \sqrt{u_{k+1}}$.

b) En déduire que pour tout $n \in IN$; $S_n = \frac{1}{2} - \sqrt{u_{n+1}}$ et calculer $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

3°) Soit (v_n) la suite réelle définie sur IN par $v_0 = \sqrt{2}$ et $v_{n+1} = \frac{v_n}{\sqrt{1 + u_n . v_n^2}}$.

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN$; $v_n = \frac{1}{\sqrt{1 - \sqrt{u_n}}}$.

b) En déduire $\lim_{n \to +\infty} v_n$.

Exercice 10 :

On considère la suite (u_n) définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3}{\sqrt{6 - u_n^2}} \text{, pour tout } n \in IN \end{cases}$

1°) Soit la suite (v_n) définie sur IN par $v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison 1.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n. Trouver alors $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

2°) a) Vérifier que pour tout $n \in IN$, on a : $u_n^2 = 3 - \frac{3}{n+1}$.

b) Pour tout $n \in IN$. On pose $S_n = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + ... + u_{n-1}^2$. Montrer que : $S_n = 3n - 3\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}\right)$.

3°) Soit $W_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$, pour tout $n \in IN^*$.

a) Etudier la monotonie de (W_n).

b) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, on a : $W_{2n} - W_n \geq \frac{1}{2}$. En déduire que (W_n) n' est pas majorée

c) Déterminer alors $\lim_{n \to +\infty} W_n$.

4°) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 2$ on a $W_n \leq \left(\frac{6}{7}\right) n$.

b) En déduire que $S_n \geq \frac{3}{7} n$ et déterminer $\lim_{n \to +\infty} S_n$.