Suites réelles
Série N°2

Bac Maths — Lycée pilote Bourguiba — 2020/2021

Prof : Masmoudi Radhouane

Exercice 1 :

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{2u_n} \end{cases}$; pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.
2. a) Étudier la monotonie de la suite u .
   b) En déduire que la suite u est convergente et déterminer sa limite.
3. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2}(u_n - 1)$.
   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 1 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$
   c) Retrouver la limite de la suite u .
4. Soit (S_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \leqslant S_n \leqslant n + 1 - \frac{1}{2^n}$.
   b) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$.

Exercice 2 :

Soit u la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 2}$.

1. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 2$.
   b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
2. a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 2 = \dfrac{(u_n - 2)(u_n + 2)}{2(u_{n+1} + 2)}$.
   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - 2 \leqslant \frac{3}{4}(u_n - 2)$.
   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n - 2 \leqslant 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$.
   c) Prouver que la suite u converge vers un réel que l'on précisera.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} k u_k$.
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leqslant S_n - n(n+1) \leqslant 6n\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$.
   b) Calculer alors $\lim_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n^2}$

Exercice 3 :

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} - 1 \ , \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
4. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2}(u_n - 1)$.

   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, $0 < u_n - 1 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et retrouver la limite de (u_n).

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a,$0 < S_n - n \leqslant 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

   b) En déduire $\lim_{n \to +\infty} S_n$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}$

Exercice 4 :

on considère les suites (u_n) et (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_o = 2 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{2}{u_n} \text{ et } u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont minorées par 1 et majorée par 2.
2. a) Montrer que Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$

   b) Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $, u_n \geqslant v_n$.
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et que la suite (v_n) est croissante.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n \leqslant 1$.
   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $(u_n - v_n)^2 \leqslant u_n - v_n$
5. Montrer que Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \frac{1}{4}(u_n - v_n)$. En déduire que Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n - v_n \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n$
6. Déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes vers la même limite L.
7. a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \sqrt{2}| = \dfrac{1}{2u_n}(u_n - \sqrt{2})^2$

   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant 1$ puis que $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$

   c) Déterminer alors L.

Exercice 5 :

Soit u la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + u_n + \dfrac{2}{u_n} \ ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $u_n \geqslant 1$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. a) Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 \leqslant u_{n+1} - u_n \leqslant 3$.
   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $n + 1 \leqslant u_n \leqslant 3n + 1$.
   c) Calculer la limite de la suite (u_n).
4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{u_k} = \frac{(-1)^0}{u_0} + \frac{(-1)^1}{u_1} + \cdots + \frac{(-1)^{2n}}{u_{2n}}$ et $w_n = v_n - \dfrac{1}{u_{2n+1}}$.
   a) Vérifier que $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_{2n+2}} - \dfrac{1}{u_{2n+1}}$ et que $w_{n+1} - w_n = \dfrac{1}{u_{2n+2}} - \dfrac{1}{u_{2n+3}}$.
   b) En déduire que la suite (v_n) est décroissante et que la suite (w_n) est croissante.
   c) Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.
   d) On pose $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$. Montrer que $\dfrac{3}{4} \leqslant \ell \leqslant 1$.

Exercice 6 :

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \dfrac{1 + u_n^2}{u_n - 1} \ , \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

I) On suppose que $u_0 > 1$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$ et que $u_{n+1} - u_n > 1$.
2. Montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée et donner sa limite.

II) On suppose que $u_0 = -\dfrac{1}{2}$.

1. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 < u_n < 0$.
   b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   c) Déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.
2. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + 1 \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n + 1)$.
   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + 1 \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$.
   c) Retrouver alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on donne $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (u_k + 1)$ et (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = v_n + \sqrt{v_n^2 - u_n} \ , \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   a) Montrer que la suite (S_n) est croissante et majorée par 1.
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n \geqslant -u_n$
   c) Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \geqslant n - S_n + 1$.
   d) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

Exercice 7 :

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n+6}{u_n+2} \ ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $u_n \geqslant 0$.

b) Vérifier que $u_{n+1} - 2 = -\dfrac{u_n - 2}{u_n + 2}$.

c) En déduire que $u_{n+1} - 2$ et $u_n - 2$ sont de signes contraires.

2. a) Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \leqslant 2 \leqslant u_{2n+1}$.

b) En déduire que si la suite (u_n) est convergente alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $u_n \geqslant 1$.

4. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $|u_{n+1} - 2| \leqslant \dfrac{1}{3}|u_n - 2|$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $|u_n - 2| \leqslant \dfrac{1}{3^{n-1}}$.

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

5. Soient les suites (a_n) , (b_n) et (S_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} u_{2k} \quad , \quad b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} u_{2k+1} \quad \text{et} \quad S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} u_k$$

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $2 - \dfrac{3}{9^k} \leqslant u_{2k} \leqslant 2$ et que $2 \leqslant u_{2k+1} \leqslant 2 + \dfrac{1}{9^k}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n}\left(2n - \frac{11}{8} + \frac{27}{8}\frac{1}{9^{n+1}}\right) \leqslant a_n \leqslant \frac{2n+2}{n} \quad \text{et que} \quad \frac{2n+2}{n} \leqslant b_n \leqslant \frac{1}{n}\left(2n + \frac{27}{8} - \frac{9}{8}\frac{1}{9^{n+1}}\right).$$

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n$.

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $S_{2n} = \dfrac{a_n + b_n}{2} - \dfrac{u_{2n+1}}{2n}$ et que $S_{2n+1} = \dfrac{n(a_n + b_n)}{2n+1}$.

e) Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

Exercice 8 :

On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \dfrac{n}{2^{n-1}}$

1. **a)** Montrer que la suite U est décroissante . En déduire qu'elle est convergente

   b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{1}{2^n}$

   c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

2. Soit S la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k$

   Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $S_n = -U_n + 4\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ et en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

3. Soit V la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_n = n(\sin x)^{n-1}$, où x est un réel tel que $0 < x \le \frac{\pi}{6}$

   a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $0 < V_n \le U_n$ et en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$

   b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $V_{n+1} = (\sin x)V_n + (\sin x)^n$

4. Soit S′ la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $S'_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k(\sin x)^{k-1}$.

   Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $S'_n(1-\sin x) = (-\sin x)V_n + \dfrac{1-(\sin x)^n}{1-\sin x}$ et en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S'_n$

Exercice 9 :

Soit U la suite définie par $U_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = U_n + 2 + \dfrac{1}{U_n^2}$.

1. **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \ge 1$ et que U est croissante .

   b) Montrer que U est non majorée . Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

2. Soit la suite V définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = 2 + \dfrac{1}{U_n^2}$.

   a) Etudier la monotonie de la suite V .

   b) En déduire que V est convergente .

3. **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \ge 1 + 2n$.

   b) Rétrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$.

4. **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,$2 \le V_n \le 2 + \dfrac{1}{n(n+1)}$.

   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,on pose : $S_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} V_k$. En remarquant que $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, montrer que la suite (S_n) est convergente et calculer sa limite .