

Ex 1) Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) + 1 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \frac{2 + \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- 1) a) Montrer que pour tout x appartenant à $] -\infty, 0[$ on a $-x^2 + 1 \leq f(x) \leq x^2 + 1$
- b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$
- c) Montrer que f est continue en 0
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- 3) Montrer que f est continue sur \mathbb{R}
- 4) Montrer qu'il existe un réel $x_0 \in] -2, -1[$ tel que $f(x_0) = 0$
- 5) a) vérifier que pour tout x de \mathbb{R}_+ on a $f(x) = -1 + \frac{4}{2 + \sqrt{x}}$
- b) En déduire que f est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+
- c) Déterminer l'image de l'intervalle $[0, +\infty[$ par f
- d) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $]0, 1[$ et que cette solution est l'unique dans \mathbb{R}_+

Ex 2) Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1 - \cos(2x - 6)}{(x - 3)^2} & \text{si } x < 3 \\ f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3} - x + 5 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

- 1) a) Montrer que $\forall x \in] -\infty, 3[$ $0 \leq f(x) \leq \frac{2}{(x - 3)^2}$
- b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2) Montrer que f est continue sur \mathbb{R}

3) Soit la fonction g définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \int \frac{3}{\cos x} & \text{si } x \in]0, \frac{\pi}{2}[\\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \end{cases}$$

Montrer que g est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}[$

Ex 3) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{1}{x - 1}$

- a) Dresser le tableau de variation de f
- b) Résoudre dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ l'équation $f(x) = 1$

2) Soit la fonction g continue sur chacun des intervalles $] -\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$

et dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	0	1	$3 + \infty$
$g(x)$	$-\infty$	1	$-\infty$	1

- a) Donner le domaine de définition de chacune des fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$
- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} (f \circ g)(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(f(x))$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} (g \circ f)(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (f \circ g)(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} (g \circ f)(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ g)(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} (g \circ f)(x)$$