Exercice n°1: (6 points)

1- Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 - 2(e^{i\theta} - i)z + (e^{i\theta} - i)^2 + e^{2i\theta} = 0$, avec $\theta \in [0, 2\pi[$.

Dans le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, Ω, N, M_1, M_2 les points du plan d'affixes respectives : 1, $-i$, $e^{i\theta}$, $z_1 = (1-i)e^{i\theta} - i$ et $z_2 = (1+i)e^{i\theta} - i$.

2- a- Déterminer et construire l'ensemble des points M_1 lorsque θ varie dans $[0, 2\pi[$.

b- Soit l'application f : $P \to P$, $M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = iz - 1 - i$

Montrer que f est la rotation de centre Ω et d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{2}$.

c- Montrer que M_2 est l'image du point M_1 par f.

d- En déduire l'ensemble des points M_2 lorsque θ varie dans $[0, 2\pi[$.

e- Soit I le milieu du segment $[M_1 M_2]$, montrer que I est l'image du point N par la translation de vecteur $\overrightarrow{O\Omega}$

3- On désigne par Δ la droite parallèle à (OA) passant par Ω, par Δ' la médiatrice du segment [OΩ] et par ω le milieu du segment [AΩ]. On pose $g = f \circ t_{\overrightarrow{O\Omega}}$.

a- Caractériser les isométries : $S_\Delta \circ S_{\Delta'}$ et $S_{(A\Omega)} \circ S_\Delta$.

b- Montrer que g est la rotation de centre ω et d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{2}$.

Exercice n°2 : (6 points)

Soit ABCD un carré direct de centre I et E le point du plan tel que BED soit un triangle équilatéral direct

On désigne par J et K les milieux respectifs des segments [AD] et [DC].

1- Soit l'isométrie $f = t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_{(AC)}$

a- Montrer que l'application $f \circ S_{(JK)}$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{IC}$

b- En déduire que f est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

2-a- Montrer que les points I, C et E sont alignés.

b- Identifier l'application $g = S_{(IK)} \circ S_{(EC)}$

3-a- Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}}) \equiv \frac{\pi}{12} [2\pi]$

b- Déterminer les droites Δ et Δ' tel que $r_{\left(E, \frac{\pi}{3}\right)} = S_{(BE)} \circ S_\Delta$ et $r'_{\left(B, \frac{\pi}{6}\right)} = S_{\Delta'} \circ S_{(BE)}$

c- Caractériser alors l'application $h = r'_{\left(B, \frac{\pi}{6}\right)} \circ r_{\left(E, \frac{\pi}{3}\right)}$

c- Montrer que $h \circ g^{-1}$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

d- Soit M un point du plan, on pose $M_1 = g(M)$ et $M_2 = h(M)$ tel que $M_1 \notin (AB)$.

Quelle est la nature du quadrilatère ABM_2M_1

4- Soit φ une isométrie qui laisse globalement invariant le carré ABCD et tel que $\varphi(C) = A$

a- Montrer que $\varphi(I) = I$ et $\varphi(C) = A$

b- Déterminer alors toutes les isométries φ

Soit f une fonction dérivable sur IR vérifiant ; $f(0)=0$, $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$ avec L un réel. 1-

Soit g la fonction définie sur IR par $g(x)=f(x)+f(-x)$.

Calculer $g'(x)$ et en déduire que f est une fonction impaire.

2- En utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis, montrer que $f(1)\le 1$.

3- Soit H la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $H(x)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$

a- Calculer H'(x) sur $]0,+\infty[$.

b- En déduire que $L=2f(1)$ puis calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

4- Soit h la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par $h(x)=\tan x$.

a- Calculer $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f\circ h(x)$.

b- Montrer que la fonction G définie par $G(x)= f\circ h(x) - x$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer sa fonction dérivée.

c- En déduire que pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$: $f\circ h(x)=x$

d- Calculer f(1) et en déduire la valeur de L.

5-a- Dresser ~~son~~ le tableau de variations de la fonction f.

b- Tracer la courbe (C) de f dans un r.o.n $(O,\vec{i},\vec{j})$.(en précisons les asymptotes et la tangente à l'origine)

Exercice n°4 :(5,5 points)

Soit (U_n) la suite définie sur IN^* par $U_1=1$ et pour tout $n\in IN^*$: $U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n+\frac{1}{2}\sqrt{U_n^2+\frac{1}{(n+2)^3}}$

1- Soit pour tout $n\in IN^*$: $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)(k+2)}\right)$

a- Montrer que pour tout $n\in IN^*$: $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$.

b- Vérifier que pour tout $k\in IN^*$: $\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}=\frac{2}{k(k+1)(k+2)}$.

c- Montrer alors que pour tout $n\in IN^*$: $S_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

d- En déduire que pour tout $n\in IN^*$: $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+2)^3}\le\frac{1}{4}$

2-a- Montrer que pour tout $n\in IN^*$: $U_n\ge 1$

b-Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c- Montrer que pour tout $n\in IN^*$: $U_{n+1}-U_n\le\frac{1}{4(n+2)^3}$

d- En déduire que pour tout $n\in IN^*$: $U_{n+1}-1\le\frac{1}{16}$

e-Montrer alors que la suite (U_n) est convergente vers une limite L dont on donnera un encadrement.