Lycée pilote Sfax Smaoui sofiène	**Série d'exercices n°4**	$4^{ème}$ Math

Exercice 1 On considère l'équation $(E_\theta) : 16\left(\tan^2\theta\right)Z^2 - 4(1+2i\tan\theta)Z - (\tan\theta - i)^2 = 0$ où $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $E_{\frac{\pi}{4}}$.

2) a) Montrer que l'équation (E_θ) admet dans $\mathbb{C}$ une seule solution réelle que l'on déterminera.

b) Déterminer l'autre racine z_1 en fonction de θ.

c) Mettre $W = (\tan\theta - i)$ sous forme exponentielle. En déduire z_1 sous forme exponentielle.

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé dirrect $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $M\left(\frac{1}{4\sin^2\theta}e^{i2\theta}\right)$ et $N(2i\cos\theta)$. Soit M' le symétrique de M par rapport à la droite $(O, \vec{v})$.

a) Déterminer θ pour laquelle, les points O, M et N soient alignés.

b) Déterminer θ pour laquelle, le quadrilatère OMNM' soit un losange.

x **Exercice 2** Le plan complexe P est rapprté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère le point A d'affixe 1 et l'application $f : P \to P$

$$M(z) \mapsto M'(z') \text{ tel que } z' = 2z - z^2.$$

1) Déterminer les points invariants par f.

2) On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z^2 et $2z$.

a) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que les points O, M_1 et M_2 soient alignés.

b) On suppose que M n'appartient pas à l'axe des abscisses.

Montrer que OM_1M_2M' est un parallèlogramme.

3) On suppose que M appartient au cercle Γ de centre O et de rayon 1.

a) Montrer que $AM = MM'$ et que $\frac{z'-1}{z}$ est réel.

b) En déduire que A et M' sont symétriques par rapport à la tangente Δ à Γ en M.

4) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, léquation $(E)\ 2z - z^2 = 1 + e^{i2\theta}$ où $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

(On notera z_1 et z_2 les solutions de (E) tel que $\operatorname{Im}(z_1) \succ 0$).

b) Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

c) Montrer que $N_1(z_1)$ et $N_2(z_2)$ sont symétriques par rapport à un point fixe à préciser.

d) Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points N_1 lorsque θ décrit $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. En déduire l'ensemble E_2 des points N_2 lorsque θ décrit $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 3 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : Z^2 - 2(1+\cos 2\theta)Z + 2(1+\cos 2\theta) = 0$, $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1. a. Résoudre l'équation (E).

b. Donner l'écriture exponentielle de chacune des solutions.

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, On désigne par A et B les points images des solutions de (E) et par C le point d'affixe 2.
Déterminer θ tel que OACB soit un losange.

Exercice 4 Le plan complexe P est rapprté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère le point $M(z)$ et le point $M'(z')$ tel que $z' = z^2 + iz$.

1) Déterminer l'ensemble des points M tels que M et M' sont confondus.

2) Soit $A\left(-\frac{i}{2}\right)$. Soit $N_1(z_1)$ et $N_2(z_2)$ deux points du plan.
Montrer que $z'_2 = z'_1$ si et seulement si $N_2 = N_1$ ou $N_2 = S_A(N_1)$.

3) a) Déterminer l'ensemble $E = \{M(z) \text{ tel que } z' \in \mathbb{R}\}$.

b) Tracer la parabole **P** d'équation $y = x^2 + \frac{1}{4}$ et la droite $D : y = x$.

c) Trouver, à l'aide de **P** et D, une construction du point M' lorsque le point M appartient à la droite $(A, \vec{u})$.

Exercice 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. On considère les points $A(2)$ et $B(3)$.

Soit Z un nombre complexe différent de 2 et $Z' = \dfrac{\overline{Z}-3}{\overline{Z}-2}$. On désigne par M et M' les points d'affixes respectives Z et Z'.

1. a. Vérifier que $Z' - 1 = \dfrac{-1}{\overline{Z}-2}$.

b. En déduire que $IM' \times AM = 1$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{IM'}}\right) \equiv \pi[2\pi]$.

2. Construire le point M' lorsque M est un point du cercle $\mathcal{C}_1$ de centre A et de rayon 1.

3. Dans cette question, le point M appartient au cercle $\mathcal{C}_2$ de centre B et de rayon 1.

a. Montrer qu'il existe un réel θ de $]-\pi, \pi[$ tel que $Z = 3 + e^{i\theta}$.

b. Ecrire $Z' - 1$ sous forme exponentielle.

c. Montrer que M' appartient à la droite $\Delta : x = \frac{1}{2}$.

d. Construire alors le point M' .

Exercice 6

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^6 + i = 0$.

2. a. On pose $f(Z) = Z^6 + i$. Ecrire $f(Z)$ en produit de facteurs de 1^er^ degré.

b. Justifier que $1 - e^{i\alpha} = -2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}$ pour tout réel α.

c. En exprimant $f(1)$ de deux façons, montrer que

$$\sin\left(-\frac{\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{7\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{11\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{15\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{19\pi}{24}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{64}.$$

3. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : Z^6 = -i(2-Z)^6$.

a. Montrer que si Z est solution de (E) alors $|Z| = |2-Z|$ et que $Z=1+iy$, $y \in \mathbb{R}$.

b. Montrer que si Z est une solution de (E) alors $\arg(Z) + \arg(2-Z) \equiv 0[2\pi]$.

c. Si on pose $\arg(Z) \equiv \theta[2\pi]$, montrer que $12\theta \equiv \frac{-\pi}{2}[2\pi]$.

d. En déduire une construction des images des solutions de (E), et donner ces solutions.