Lycée pilote Sfax Smaoui sofiène	**Série d'exercices n°7**	$4^{ème}$ Math

Exercice 1 Soit la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{\sqrt{3+u_n^2}} \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$.

1°) Montrer que *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $0 \le u_n < 1$.

2°) a) Montrer que *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \succ \dfrac{1+u_n}{2}$. En déduire que u est croissante.

b) Montrer que u est convergente.

c) Soit v la suite définie par $v_n = \sum_{k=0}^{n}(2u_{k+1} - u_k)$; $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

3°) a) *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $0 < 1 - u_{n+1} < \dfrac{1}{2}(1-u_n)$.

b) *En déduire que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $1 - u_n \le \dfrac{1}{2^n}$. Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4°) Soient x et y les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par $x_n = \dfrac{n}{2^n}$ et $y_n = n(1-u_n)$.

a) Etudier la monotonie de la suite x. En déduire qu'elle est convergente.

b) Vérifier que $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}x_n + \dfrac{1}{2^{n+1}}$ puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n$.

Exercice 2 Soit U une suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = a \in \mathbb{R}$, $U_{n+1} = \dfrac{1}{1+2U_n}$ $n \in \mathbb{N}$.

1- Déterminer les valeurs de a pour les quelles U est constante.

On suppose pour toute la suite de l'exercice que $a = 1$

2- Montrer que *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$.

3- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = U_{2n}$ et $W_n = U_{2n+1}$

a- Déterminer le sens de variation sur $\mathbb{R}_+$ de $f : x \to \dfrac{1}{1+2x}$

b- Montrer par récurrence que la suite V est décroissante.

c- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n > \frac{1}{2}$

d- En déduire que la suite V est convergente et préciser sa limite.

e- En remarquant que $W_n = f(V_n)$, montrer que (W_n) converge vers un réel que l'on précisera . Quelle est alors la limite de U_n

Exercice 3

A/ Soit les suites définies par, $U_n = \dfrac{2n+1}{3^n}$ et $V_n = U_{n+1} - \dfrac{1}{3}U_n$, $n \in \mathbb{N}$.

1/ Montrer que U est décroissante, en déduire que U est convergente. On note ℓ sa limite.

2/ Exprimer V_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{+\infty} V_n$. En déduire ℓ.

3/ a/ Pour $n \ge 1$; calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} V_k$ en fonction de n.

b/ Soit $S'_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$; $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $S'_n = 2 - \dfrac{1}{2 \cdot 3^{n-1}} - \dfrac{1}{2}U_n$. En déduire $\lim\limits_{+\infty} S'_n$

B/ *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ et po ... $)^{2n}$.