① Montrer que f est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

② Montrer que pour tout $t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, $-2 \leq f'(t) \leq -1$.

③ En déduire que pour tout $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\frac{\pi}{2} - 2x \leq \frac{1-\tan x}{\tan x} \leq \frac{\pi}{4} - x$.

6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+3} - x + 1\right)$.

①Etudier f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

② On considère la suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n), n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

a) Représenter sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite (u_n).

b) Que peut-on conjecturer ?

③ a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

b) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\left|f'(x)\right| \leq \frac{1}{2}$.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|u_{n+1} - 1\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - 1\right|$.

d) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$.

① Etudier f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

② Montrer, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis,

que pour tout réel x, $f'(x) \leq f(x+1) - f(x) \leq f'(x+1)$.

③ On considère la suite (u_n) par $u_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f'(k)$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculer u_0 et u_1.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{f(n)}{n+1} \leq u_n \leq \frac{f(n+1)-1}{n+1}$.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

④ On considère la suite (v_n) par $v_n = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{1^2+1}} + \frac{2}{\sqrt{2^2+1}} + \ldots + \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que (v_n) est convergente.