Exercice 1

1) Montrer que pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ on a $1-\frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1-\frac{x^2}{\pi}$

2) En déduire que pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ on a $x-\frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x-\frac{x^3}{3\pi}$

3) Calculer $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)-x}{x^2}\right)$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{1+x+x^2}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

A) 1) Calculer $f'(x)$ est dresser le tableau de variation de f

2) Montrer que $\mathcal{C}$ admet deus points d'inflexion I et I'

3) Tracer $\mathcal{C}$ .On précisera les tangentes a $\mathcal{C}$ aux points I et I'

4)a) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α sur $[0,+\infty[$ et que $\frac{2}{5}<\alpha<\frac{4}{5}$

b) Vérifier que $pour\ tout\ \ x \in [\frac{2}{5},\frac{4}{5}]$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{4}{5}$

c) En déduire que pour tout $(x;y) \in \left[\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right]^2$ $on\ a\ |f(x)-f(y)| \leq |x-y|$

5) soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0=\frac{3}{5} \\ U_{n+1}=f(U_n)\end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{2}{5} \leq U_n \leq \frac{4}{5}$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1}-\alpha| \leq \frac{4}{5}|U_n-\alpha|$

c) En déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite

Exercice3

Soit une fonction définie et dérivable sur R vérifiant $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ et $f(0)=0$ **(voir exercice 5 série 1)**

1) Soit $t \in]0,+\infty[$ et $x \in [0,t]$ montrer que $(f)'(x) \geq \frac{1}{1+t^2}$ et en déduire que $f(t) \geq \frac{t}{1+t^2}$

2) Soit $a>0$ et h_a la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $h_a(x)=\left(x-\mathrm{f}(x)\right)a^3-\left(a-\mathrm{f}(a)\right)x^3$

a) Calculer $h_a(0)$ et $h_a(a)$ et montrer qu'il existe $c \in]0,a[$ tel que $h'_a(c)=0$

b) En déduire que $\frac{f(a)-a}{a^3}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1+c^2}$ et calculer $\lim_{a\to 0^+}\frac{f(a)-a}{a^3}=-\frac{1}{3}$

3) Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} g(x)=\frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} & si\ x>0 \\ 1 & si\ x=0\end{cases}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(0,\vec{i},\vec{j}\right)$

a) Montrer que g est dérivable à droite en 0 et déterminer $g'_d(0)$

b) Montrer que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x \in]0,+\infty[$ on a

$$g'(x)=\frac{1}{2(\sqrt{x})^3}\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x}-\mathrm{f}(\sqrt{x})\right)$$

c) Dresser le tableau de variation de et tracer(C) on précisera la tangente au point d'abscisse 0

4) Soit $n\in$ N on considère les suites $v_n=\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$, $u_n=\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{2k+1}$

et la fonction F définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $F_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}tan^{2k+1}(x)$

a) Montrer que (v_n) et(u_n) sont adjacentes

b) Montrer que $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ on a $F'_n(x)=1-(-1)^{n+1}tan^{2n+2}(x)$

c) Montrer que pour tout $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ on a $F_{2n+1}(x)\le x\le F_{2n}(x)$

d) En déduire la limite des suites (v_n) et(u_n)

Exercice 4

Soit une fonction définie et dérivable sur $]-1,1[$ vérifiant $g'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $g(0)=\frac{\pi}{2}$

1) Soit h la fonction définie sur $I=]0,\pi[$ par $h(x)=g(\cos(x))$

a) Montrer que h est dérivable sur I et calculer $h'(x)$

b) En déduire l'expression de $h(x)$

c) Montrer que g est prolongeable par continuité adroite en -1 et a gauche en 1 et définir sont prolongement g

2) Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(\mathrm{x})=G(sin^2(x))$

a) Montrer que f est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et que $f'(\mathrm{x})=\frac{-2\sin(\mathrm{x})}{\sqrt{1+\sin^2(\mathrm{x})}}$

b) Soit $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ montrer que pour tout $t\in\left[x,\frac{\pi}{2}\right]$ on a $\frac{-2}{\sqrt{1+\sin^2(\mathrm{x})}}\le f'(t)\le\frac{-2\sin(x)}{\sqrt{2}}$

puis que $\frac{-2}{\sqrt{1+\sin^2(\mathrm{x})}}\le\frac{f(x)-f(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}}\le\frac{-2\sin(x)}{\sqrt{2}}$

c) En déduire que f est dérivable a gauche en $\frac{\pi}{2}$

3) a)Montrer que l'équation $f(\mathrm{x})=\mathrm{x}$ admet une unique solution α sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

b) Vérifier que $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$

4) Soit h la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $h(x)=fof(x)$Et soit $(\mathrm{u_n})$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases}\mathrm{u_0}=\frac{\pi}{4}\\ \mathrm{u_{n+1}}=\mathrm{h}(\mathrm{u_n})\end{cases}$

a) Montrer que pour tout $\mathrm{n}\in\mathbb{N}$ on a : $0<\mathrm{u_{n+1}}\le\mathrm{u_n}<\alpha$ en déduire que $(\mathrm{u_n})$ est convergente

b) Montrer que pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ on a $h(x)=\mathrm{G}(1-sin^4(x))$

c) Montrer que les solutions de l'équation $h(x)=x$ sont $0,\alpha\ et\frac{\pi}{2}$ .Déterminer alors la limite de $(\mathrm{u_n})$