M.BHIRI

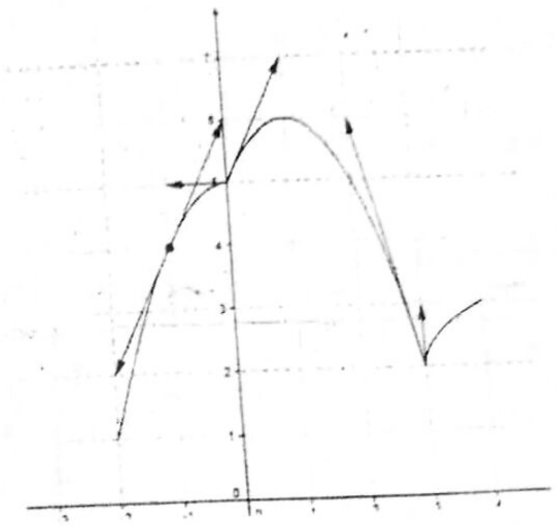
Exercice 0 :

A l'aide de la dérivabilité calculer les limites éventuelles suivantes :

$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x+3}-2-\sqrt{2}}{x-1}$; $\lim_{x\to1}\frac{\sin^2(\pi x)}{x-1}$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan(x)-1}{4x-\pi}$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-(\sin x)^{2020}}{\cos x}$ $= 0$

Exercice 1 :

La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur [-2 , 4]



Calculer les limites éventuelles suivantes

a) $\lim_{x\to3^-}\frac{f(x)-2}{x-3} =$ $-4 = f'g(3)$

b) $\lim_{x\to3^+}\frac{f(x)-2}{x-3} =$ $f'd(3) = +\infty$

c) $\lim_{x\to1}\frac{f(2-\cos(\pi x))-2}{x-1} =$

d) $\lim_{x\to0}\frac{f\left(\frac{2x+8}{x+2}\cos(x)\right)-4}{x} =$ $\lim_{x\to0}$ $\frac{f(g(x))-f(g(0))}{x-0}$ $=(f\circ g)'(0)$ $=g'(0)\times f'(g(0))$ $=\frac{3}{2}\times f'(-1)$ $=\frac{3}{2}\times 2=$

e) $\lim_{x\to0^-}\frac{f(x+\tan(x))-5}{x} =$

• g d sur IR \ {-2}
en p

g(0) = -1
f d en (-1)
(fog) d

Exercice 2 :

Soit g la fonction définie sur IR par : g(x) = $\begin{cases}1+x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x\neq0\\ 1 & si\ x=0\end{cases}$

1) Etudier la continuité de g en 0.
2) Montrer que g est dérivable en 0.
3) Donner une estimation de $g(10^{-5})$ à 10^{-5} prés .
4) Définir la fonction dérivée de g.

Exercice 3 : Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$

1) Etudier la position de C_f par rapport à la tangente au point I d'abscisse 0.
   Interpréter graphiquement le résultat .
2) Ecrire une équation de C_f dans le repère $(I, \vec{i}, \vec{j})$
   Conclure qu'il suffit d'étudier f sur [0 , +∞[
3) Etudier les variations de f.
4) Tracer C_f .

Exercice 4 : Définir la fonction dérivée pour chacune des fonctions suivantes :

$f_1(x) = \cos^2(x)$; $f_2(x) = \cos(x^2)$; $f_3(x) = (\cos(x^2))^2$

$g_1(x) = \frac{x+2}{x-1}$; $g_2(x) = \frac{\cos(x)+2}{\cos(x)-1}$; $g_3(x) = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie sur] 0 , π] par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\tan(\frac{x}{2})}} & \text{si } x \neq \pi \\ 0 & \text{si } x = \pi \end{cases}$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à gauche en π .
2) Montrer que f est strictement monotone sur] 0 , π] .
3) Déterminer l'intervalle J image de] 0 , π] par f .
4) Soit g la fonction dérivable sur IR telle que $g'(x) = \frac{-4x}{1+x^4}$.
   a) Montrer que la fonction gof est dérivable sur] 0 , π [et calculer (gof)'(x) pour tout réel de] 0 , π [
   b) On donne $g(1) = \frac{\pi}{2}$. calculer alors gof(x)

Exercice 6 : On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = -1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

1) a) Montrer que f est dérivable sur IR et que $0 < f'(x) \leq 1$, pour tout x de IR.
   b) Dresser le tableau de variation de f.
2) Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = f(x) - x$
   a) Montrer que l'équation g(x) = 0, admet dans IR une unique solution α et que : $-2 < \alpha < -1$
   b) En déduire le signe de g(x).

3) Soit u la suite définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \ ; \forall \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Montrer que pour tout n de IN on a : $\alpha < u_n \leq 0$
b) Etudier la monotonie de la suite u.
c) Déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

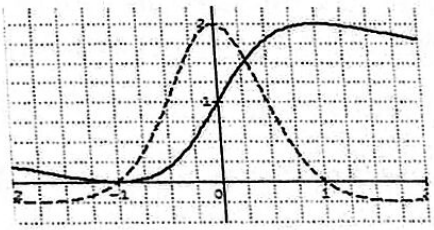
4) Soit h la fonction définie sur [1, 2] par : $\begin{cases} h(x) = f\left(\tan\frac{\pi}{x}\right) ; x \in [1,2[\\ h(2) = -2 \end{cases}$

a) Vérifier que pour tout x de [1, 2] ,$h(x) = -1 - \sin(\frac{\pi}{x})$

b) Etudier les variations de h sur [1, 2].

Exercice 7 :

Les courbes ci-contre représentent une fonction f dérivable sur [-2 , 2] en trait continu et sa fonction dérivée f' en pointillé



Répondre par vrai ou faux

a) $(\sqrt{f}\ )'(0) = \frac{1}{2}$

b) La droite D : y = x + 1 est tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

c) Il existe un réel c $\in$]-1, 1[tel que $f'(c) = 1$

d) $\lim_{x \to \frac{\sqrt{2}}{2}} \dfrac{f(\cos(\pi x^2)) - 2x^2}{2x^2 - \sin^2(\pi x^2)} = 0$

Exercice 8

Répondre par vrai ou faux

1) Soit f une fonction continue sur [0 , 1] et dérivable sur] 0 , 1 [
   Si l'on sait que f(0) = -1 et f(1) = 1 alors :
   a) L'équation f(x) =0 admet une seule solution dans] 0 , 1[.
   b) L'équation f'(x) = 2 admet au moins une solution dans]0 , 1 [.
   c) L'équation f'(x) = -2 admet au moins une solution dans]0 , 1 [.
2) Soit f une fonction co] 0 , 1 [
   Si l'on sait que

a) Il existe au moins une tangente à C_f parallèle à la droite (y = x). V

b) La fonction g définie sur [0 , 1] par g(x) = f(x) – x admet au moins un extremum sur] 0 , 1 [V

3) On désigne par f la fonction de l'exercice 1

a) Il existe au moins deux réels c dans] -1 , 1 [tels que f '(c) =1 .

b) Soit g une fonction dérivable sur [- 2 , 4] telle que g'(x) = $\frac{1}{f(x)}$. on a : $\frac{1}{6} \leq g(3) - g(-2) \leq \frac{5}{6}$.

F

Exercice 9 : Questions indépendantes

1) Montrer que pour tout réel x> 0 , on a : $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2) Soit x∈] 0 , $\frac{\pi}{2}$ [. appliquer le T I A F sur l'intervalle [0 , x] pour montrer que $1 - x^2 \leq \cos(x) \leq 1$

3) Soit $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$.

Montrer que $0 \leq f'(x) \leq 1{,}2345\,x$, $\forall x \in [\,0 , \frac{1}{10}\,]$

En déduire alors que $1 \leq f(x) \leq 1 + 1{,}2345\,x$, $\forall x \in [\,0 , \frac{1}{10}\,]$

4) Soit la suite S définie sur IN* par : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4}$

Montrer que S est croissante .

Soit $f(x) = \frac{1}{x^3}$. Montrer que pour tout entier k ≥ 1 on a : $\frac{3}{(k+1)^4} \leq f(k) - f(k+1) \leq \frac{3}{k^4}$

En déduire un majorant de la suite S puis conclure .