Lycée pilote de Tunis	**Dérivation 1**	Terminales Maths & s-ex
Mr Ben Regaya. A	**+ Eléments de corrections**	www.ben-regaya.net

Exercice1

1. Justifier les approximations suivantes pour h voisin de 0 :

   a) $(1+h)^3 \simeq 1+3h$; b) $\frac{1}{1+h} \simeq 1-h$; c) $\sqrt{1+h} \simeq 1+\frac{1}{2}h$; d) $tan\left(\frac{\pi}{4}+h\right) \simeq 1+2h$.

2. Déterminer, sans calculatrice, des approximations des réels suivants :

   a) $(1{,}01)^3$; b) $\frac{1}{1{,}02}$; c) $\sqrt{0{,}98}$.

Exercice2

Soit f continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$.

On suppose que $f(0)=1$, $f(1)=0$ et pour $x \in]0,1[$: $f'(x) = \frac{-2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$.

1. Montrer que f est strictement décroissante sur $[0,1]$.
2. On pose pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\varphi(x) = f(cosx) - \frac{2}{\pi}x$
   a) Montrer que φ est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
   b) Montrer que φ est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.
   c) Calculer $\varphi'(x)$ pour tout $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. En déduire que $f(cosx) = \frac{2}{\pi}x$.
3. On pose pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ $h(x) = f(cosx) + f(sinx)$
   a) Montrer que h est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $h'(x)$.
   b) En déduire que pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $h(x)=1$.

Exercice3

On considère une fonction φ définie sur $]0,+\infty[$, telle que $\varphi(1)=0$ et $\varphi'(x) = \frac{1}{x}$. On pose $f(x) = \varphi\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

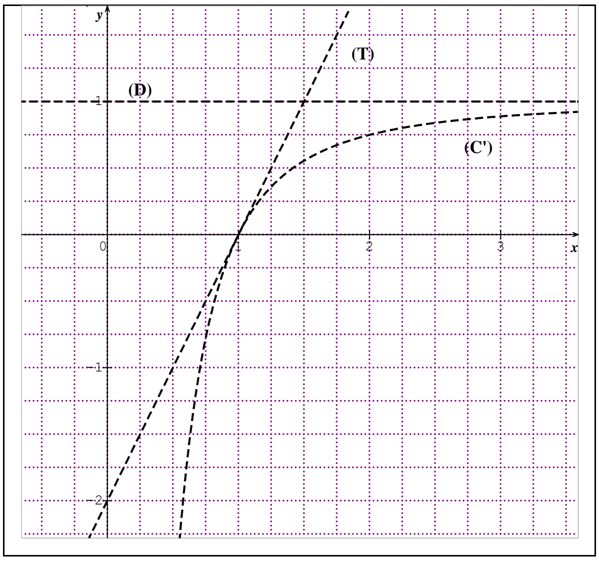
1. Montrer que f est définie, dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.
2. Montrer que f est une fonction impaire.
3. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}_+$; $f(x) \leq x$.

Exercice4

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x\sqrt{1-x}$. (C) est la courbe de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Etudier la dérivabilité de f en 1 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
3. Montrer que f est dérivable sur $]-\infty,1[$ et que $f'(x) = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$ pour tout $x \prec 1$.

4. Dresser le tableau de variation de f. Tracer (C).
5. La courbe (C') ci-contre est celle d'une fonction g dérivable sur $]0,+\infty[$ et admettant la droite (T) pour tangente au point d'abscisse 1 et (D) pour asymptote au voisinage de $+\infty$ .On note aussi que $g\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{2}{3}$ On pose $h=f\circ g$.



a) calculer $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)}{x-1}$.

b) Montrer que la fonction h est dérivable sur $]0,+\infty[$, calculer le réel $h'(x)$ en fonction de $g'(x)$ et déduire $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{h(x)}{x-1}$.

c) Dresser le tableau des variations de la fonction h.

Exercice 5

1. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x : $f(2x)=2f(x)$ (1).

   a) Déterminer la valeur de $f(0)$.

   b) Démontrer que, pour tout réel x, $f'(2x)=f'(x)$.

2. Pour x réel fixé, on désigne par (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=f'\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

   a) Démontrer que la suite (u_n) est constante.

   b) En déduire que, pour tout réel x, $f'(x)=f'(0)$.

3. Déterminer toutes les fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient (1).

Exercice 6

Soit la fonction f définie par : $f(x)=(x+1)\sqrt{x+1}$

1. Etablir les variations de f sur $[0,1]$.
2. Soit a appartenant à $]0,1]$ montrer que quelque soit x appartenant $[0,a]$ on a : $f'(0)\le f'(x)\le f'(a)$.
3. a) En appliquant le théorème des inégalités des accroissements finis à la fonction f sur $[0,a]$ montrer que :

   $$\frac{3}{2}a\le (a+1)\sqrt{a+1}-1\le \frac{3}{2}a\sqrt{a+1}$$.

   b) En déduire que pour tout a appartenant à $[0,1]$ on a : $1-\frac{a}{2}\le\frac{1}{\sqrt{a+1}}$

4. Soit $g(x)=\sqrt{x+1}-1-\frac{1}{2}x$.

a) Montrer que pour tout x appartenant à] $]0,1]$ on a : $-\frac{x}{4}\le g'(x)\le 0$.

b) Soit a appartenant à $]0,1]$.En appliquant le théorème des inégalités des accroissements finis à la fonction g montrer que : $-\frac{a^2}{4}\le\sqrt{a+1}-1-\frac{1}{2}a\le 0$.

Lycée pilote de Tunis	**Dérivation 1**	*Terminales Maths & s-ex*
Mr Ben Regaya. A	**Eléments de corrections**	*www.ben-regaya.net*

Exercice1 *On rappelle que si f est dérivable en a alors pour h voisin de zéro :* $f\left(a+h\right)\approx f(a)+f'(a)h$

1. a) Soit $f(x)=x^3$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel on a $f'(x)=3x^2$ et par suite $f'(1)=3$.
   $f(1+h)=\left(1+h\right)^3\simeq f(1)+f'(1)h=1+3h$.

   b) Soit $g(x)=\dfrac{1}{x}$. g est dérivable en tout réel non nul et on a : $g'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ et donc $g'(1)=-1$.
   $g(1+h)=\dfrac{1}{1+h}\simeq g(1)+g'(1)\times h=1-h$.

   c) Soit $k(x)=\sqrt{x}$. k est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ et pour tout x réel strictement positif
   $k'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow k'(1)=\dfrac{1}{2}$
   $k\left(1+h\right)=\sqrt{1+h}\simeq k(1)+k'(1)h\simeq 1+\dfrac{1}{2}h$.

   d) Soit $\varphi(x)=tanx$. φ est dérivable entour réel distinct de $\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\, k\in\mathbb{Z}$ et
   $\varphi'(x)=1+tan^2x\Rightarrow\varphi'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2$.
   $\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}+h\right)=tan\left(\dfrac{\pi}{4}+h\right)\simeq\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+h\times\varphi'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1+2h$.

2. a) d'après la question 1. et on prend $h=0,01$ on a : $(1,01)^3\simeq 1+3\times 0,01=1,03$ terminer le reste…

Exercice2

1. f est dérivable sur $\left]0,1\right[$ et $f'(x)=\dfrac{-2}{\pi\sqrt{1-x^2}}\prec 0$ donc f est strictement décroissante sur $\left[0,1\right]$.

2. a) $u:x\mapsto cos\left(x\right)$ est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et a valeurs dans $\left[0,1\right]$ et f est continue sur $\left[0,1\right]$ donc $f\circ u$ est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ de plus le polynôme $v:x\mapsto -\dfrac{2}{\pi}x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\varphi=f\circ u-v$ est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

   b) $u:x\mapsto cos\left(x\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u\left\langle\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[\right\rangle=\left]0,1\right[$ et f est dérivable sur $\left]0,1\right[$ donc $f\circ u$ est dérivable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$. φ est dérivable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ car somme de fonctions dérivables.

   c) Pour $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\varphi'(x)=-sinx\times f'\left(cosx\right)-\dfrac{2}{\pi}.=-sinx\left(\dfrac{-2}{\pi\sqrt{1-cos^2x}}\right)-\dfrac{2}{\pi}$
   $=-sinx\left(\dfrac{-2}{\pi\sqrt{1-cos^2x}}\right)-\dfrac{2}{\pi}=\left(\dfrac{2sinx}{\pi\sqrt{sin^2x}}\right)-\dfrac{2}{\pi}=\dfrac{2sinx}{\pi\left|sinx\right|}-\dfrac{2}{\pi}=0$ car $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $sinx\succ 0$.
   $\varphi'(x)=0$, pour tout réel x de $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $\varphi(x)=c$ avec c constante réelle .

Comme $\varphi(0)=f(1)=0$ alors $\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$,

$\varphi(x)=0$ et par suite $f(cosx)=\frac{2}{\pi}x$.

3. $u:x\mapsto cos(x)$ et $v:x\mapsto sin(x)$ sont dérivables sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et a valeurs dans $]0,1[$ donc $h=f\circ u+f\circ v$ est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

$\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $h'(x)=-sin(x)\times f'(cosx)+cosx\times f'(sinx)$

$=-sin(x)\left(\frac{-2}{\pi\sqrt{1-cos^2x}}\right)+cosx\left(\frac{-2}{\pi\sqrt{1-sin^2x}}\right)=\left(\frac{2sin(x)}{\pi\sqrt{sin^2x}}\right)+cosx\left(\frac{-2cosx}{\pi\sqrt{cosx^2x}}\right)$

$=\left(\frac{2sin(x)}{\pi|sinx|}\right)-\left(\frac{2cosx}{\pi|cosx|}\right)=0$ car sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ $sinx\succ 0$ et $cosx\succ 0$. Ainsi h est constante sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

$\Rightarrow h(x)=h(0)=f(1)+f(0)=1$

Pour $x=0$, $h(0)=f(1)+f(0)=1$

et pour $x=\frac{\pi}{2}$, $h\left(\frac{\pi}{2}\right)=f(0)+f(1)=1$.conclusion pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $h(x)=1$.

Exercice3

1. on a pour tout réel x ; $1+x^2\succ x^2\Leftrightarrow\sqrt{1+x^2}\succ|x|$ et comme $|x|$ est égale à x ou $-x$ alors $\sqrt{1+x^2}+x\succ 0$ pour tout x réel.

   $f=\varphi\circ u$ avec $u(x)=x+\sqrt{1+x^2}$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et elle strictement positive sur cet intervalle et comme φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ alors $f=\varphi\circ u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :

   $$f'(x)=\varphi'(u(x))\times u'(x)==\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\times\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)==\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\times\left(\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

2. f est impaire signifie pour tout réel x, $f(-x)=-f(x)$.

   Posons $g(x)=f(-x)+f(x)$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a : $g'(x)=-f'(-x)+f'(x)$

   (Attention la fonction $x\mapsto f(-x)$ est composée).

   Donc $g'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1+(-x)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=0$ Comme $g'(x)=0$ pour tout x réel alors la fonction g est constante

   et par suite $\forall x\in\mathbb{R}$; $g(x)=g(0)$. Or $g(0)=2f(0)=0$ donc

   $\forall x\in\mathbb{R}$; $g(x)=0$ ce qui donne $f(-x)=-f(x)$

   Finalement f est impaire.

3. Appliquons le théorème des inégalités des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[0,x]$ avec $x\in\mathbb{R}_+$.

   f dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t\in\mathbb{R}$; $0\le f'(t)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\le 1$.

   D'après le théorème des inégalités des accroissements finis pour tout réel x **strictement positif**

   $0\times(x-0)\le f(x)-f(0)\le 1\times(x-0)$ ou encore pour tout réel x strictement positif $f(x)\le x$. Un tel reste vrai lorsqu'on prend $x = 0$. Conclusion pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leq x$.

Exercice 4

1. f est définie lorsque $1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$ donc $D =]-\infty, 1]$.

2. Pour $x \in]-\infty, 1[$, $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \dfrac{x\sqrt{1-x}}{x-1} = \dfrac{x(1-x)}{(x-1)\sqrt{1-x}} = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x}}$ et donc

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{-x}{\sqrt{1-x}} = -\infty$ f n'est pas dérivable à gauche en 1. La demi-tangente à (C) au point d'abscisse 1 a pour équation : $\begin{cases} x = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$.

3. Pour x réel de $]-\infty, 1[$, $1 - x \succ 0$ et donc la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x}$ est dérivable sur cet intervalle et f l'est

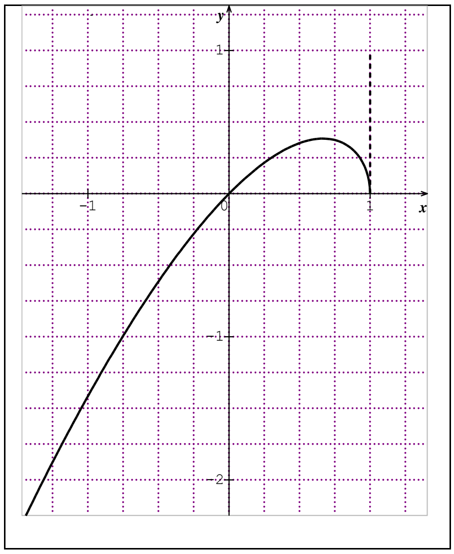
aussi et pour x réel de $]-\infty, 1[$, $f'(x) = \sqrt{1-x} + x \times \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{2(1-x) - x}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{2 - 3x}{2\sqrt{1-x}}$.

4. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$ et $f'(x) \succ 0 \Leftrightarrow x \prec \dfrac{2}{3}$. f est alors strictement

croissante sur $\left]-\infty, \dfrac{2}{3}\right]$ et strictement décroissante ailleurs.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{1-x} = +\infty$ donc (C) admet au voisinage de $+\infty$

une branche infinie parabolique de direction $(O, \vec{j})$.



5. a) On pose $\varphi(x) = g\left(sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\right) = g \circ u(x)$ avec $u(x) = sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$

u est dérivable en 1 et $u(1) = sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \succ 0$ et comme g est

dérivable en 1alors φ est dérivable en 1et $\varphi'(1) = u'(1) \times g'\left(sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = \dfrac{\pi}{2} cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \times g'(1) = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{g\left(sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\right)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x-1} = \varphi'(1) = 0$

b) g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et a valeurs dans $]-\infty, 1[$ (d'après le graphique) et f dérivable sur $]-\infty, 1[$ donc h

est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $h'(x) = g'(x) \times f'(g(x)) = g'(x) \times \dfrac{2 - 3g(x)}{2\sqrt{1 - g(x)}}$.

h est dérivable en 1 donc $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{h(x)}{x-1} = h'(1) = g'(1) \times \dfrac{2 - 3g(1)}{2\sqrt{1 - g(1)}} = 2 \times \dfrac{2 - 3 \times 0}{2\sqrt{1-0}} = 2$.

c) On a : $h'(x)=\dfrac{g'(x)}{2\sqrt{1-g(x)}}\left(2-3g(x)\right)$ et comme g est strictement croissante sur $\left]0,+\infty\right[$ alors $g'(x)\succ 0$ et

par suite le signe de $h'(x)$ est celui de $2-3g(x)$.

Or $2-3g(x)\geq 0 \Leftrightarrow g(x)\leq \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x\in \left]0,\dfrac{2}{3}\right]$.

Ainsi h est strictement croissante sur $\left]0,\dfrac{2}{3}\right]$ et strictement décroissante ailleurs. $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=-\infty$ car

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$ aussi $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)=0$. Dresser le tableau de variation.

Exercice5

1. a) On a : $f(0)=2\times f(0)$ donc $f(0)=0$.

   b) Les fonctions $x\mapsto f(2x)$ et $x\mapsto 2f(x)$ sont égales donc elles ont même dérivée. Ainsi

   $2f'(2x)=2f'(x)\Rightarrow f'(2x)=f'(x)$.

2. a) Pour $n\in\mathbb{N}$: $u_n=f'\left(\dfrac{x}{2^n}\right)=f'\left(2\times\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)=f'\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)=u_{n+1}$

   b) D'après a), pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n=u_0=f'(x)$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x}{2^n}=0$ et *f'* est continue en 0, donc

   $\lim\limits_{n\to+\infty} f'\left(\dfrac{x}{2^n}\right)=f'(0)$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=f'(0)$. Comme la suite *u* est constante, égale à *f'*(*x*), on a

   $f'(x)=f'(0)$.

3. D'après 1. et 2. ; si *f* est deux fois dérivable sur ℝ et vérifie (1), alors *f '* est constante sur ℝ ; donc *f* est une

   fonction affine. Or $f(0)=0$, donc *f* est une fonction linéaire.

   Réciproquement, si *f* est une fonction linéaire $x\mapsto kx$, avec $k\in\mathbb{R}$, alors, pour tout réel *x*

   $f(2x)=k(2x)=2f(x)$ et *f* deux fois dérivable sur ℝ.

   Les fonctions cherchées sont donc les fonctions linéaires $x\mapsto kx$, avec $k\in\mathbb{R}$.

Exercice 6

1. *f* est restriction à $[0,1]$ d'une fonction dérivable sur $\left]-1,+\infty\right[$ et $f'(x)=\sqrt{x+1}+(x+1)\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}=\dfrac{3(x+1)}{2\sqrt{x+1}}$

   $\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{3}{2}\sqrt{x+1}$

2. a) $a\in\left]0,1\right]$ et $x\in[0,a]\Rightarrow 0\leq x\leq a\Leftrightarrow 1\leq x+1\leq 1+a\Leftrightarrow \dfrac{3}{2}\leq f'(x)\leq f'(a)=\dfrac{3}{2}\sqrt{a+1}$

3. a) *f* est dérivable sur $\left]-1,+\infty\right[$ et pour $a\succ 0$ et $x\in[0,a]$ $\dfrac{3}{2}\leq f'(x)\leq\dfrac{3}{2}\sqrt{a+1}$. D'après le théorème des

   inégalités des accroissements finis $\dfrac{3}{2}(a-0)\leq f(a)-f(0)\leq\dfrac{3}{2}(a-0)\sqrt{a+1}$

   $\Leftrightarrow\dfrac{3}{2}a\leq(a+1)\sqrt{a+1}-1\leq\dfrac{3}{2}a\sqrt{a+1}$ .Cette double inégalité reste valable pour *a* = 0 (vérification fa

D’où $\forall a \in [0,1]$; $\frac{3}{2}a \le (a+1)\sqrt{a+1}-1 \le \frac{3}{2}a\sqrt{a+1}$.

b) On a $(a+1)\sqrt{a+1}-1 \le \frac{3}{2}a\sqrt{a+1} \Rightarrow a+1-\frac{1}{\sqrt{a+1}} \le \frac{3}{2}a \Leftrightarrow a+1-\frac{3}{2}a \le \frac{1}{\sqrt{a+1}} \Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}a \le \frac{1}{\sqrt{a+1}}$.

4. a) g est restriction à $[0,1]$ d’une fonction dérivable sur $]-1,+\infty[$ et $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}-1\right)$.

D’après 3. b) on a $\forall x \in]0,1]$; $1-\frac{x}{2} \le \frac{1}{\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow \forall x \in]0,1]$; $\frac{1}{\sqrt{x+1}}-1 \ge -\frac{x}{2} \Leftrightarrow$

$\forall x \in]0,1]$; $g'(x) \ge -\frac{x}{4}$.

D’où $\forall x \in]0,1]$; $-\frac{x}{4} \le g'(x) \le 0$.

b) $a \in [0,1]$; $x \in [0,a] \Rightarrow -\frac{a}{4} \le -\frac{x}{4} \le g'(x) \le 0$.

g est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et $\forall x \in [0,1]$ $(a \succ 0)$; $-\frac{a}{4} \le g'(x) \le 0$. D’après le théorème des inégalités des accroissements finis $-\frac{a}{4}(a-0) \le g(a)-g(0) \le 0 \Leftrightarrow -\frac{a^2}{4} \le \sqrt{a+1}-1-\frac{1}{2}a \le 0$.