Mathématiques	Révision n°6		
Isométries			
4ème Maths	A.S :2020/2021	BAC2021	Prof:OULED BELGACEM FAROUK

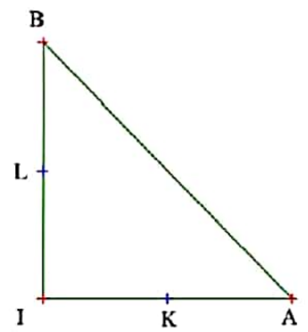
Exercice n°1 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle rectangle et isocèle IAB tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On désigne par K et L les milieux respectifs des segments [IA] et [IB]. (voir figure page annexe)

1) Montrer qu'il existe un déplacement unique f tel que f(A) = I et f(I) = B. montrer que f est une rotation et préciser son centre Ω.
2) On note H le symétrique de I par rapport à A et Δ la droite perpendiculaire à (ΩH) en Ω. Δ coupe (BI) en C.
   a) Déterminer f((AI)) et f((ΩH)).
   b) En déduire f(H).
   c) Montrer alors que C est le symétrique de B par rapport à I.
3) a) Soit g l'antidéplacement tel que g(A) = I et g(I) = B. Montrer que g est une symétrie glissante, donner sa forme réduite puis construire $\Omega' = g(\Omega)$.
   b) On pose $h = t_{\overrightarrow{IA}} \circ g$. Déterminer $h(\Omega)$ et h(A). Caractériser alors h.
4) pour tout point M du plan, on note M' = f(M) et M'' = g(M). Montrer que M' et M'' sont symétriques par rapport à une droite que l'on précisera.
5) On rapporte le plan au repère orthonormé direct $\left(I,\overrightarrow{IK},\overrightarrow{IL}\right)$.

   Montrer que l'expression complexe associée à g est $z' = -i\bar{z} + 2i$. En déduire celle de h.



Exercice n°2 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle en B tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

On désigne par O le milieu de [AC] , par J le milieu de [BC] et par D le symétrique de B par rapport à (AC).

1) Montrer que le quadrilatère ABOD est un losange.

2) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R qui transforme A en O et B en C.

b) Montrer que R est une rotation de centre D.

3) On désigne par R_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$, par R_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et par T la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. On pose $f = R_C o T o R_B$.

a) Déterminer f(B).

b) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

4) Soit $g = T_{\overrightarrow{AB}} o S_O$.

a) Déterminer g(C).

b) Caractériser g.

c) On pose $M' = T_{\overrightarrow{AB}}(M)$ et $M'' = S_O(M)$ où M est un point quelconque du plan

Montrer que le point J est le milieu du segment [M'M'']

5) On désigne par I le milieu du segment [OA] et par K le milieu du segment [AB].

Soit φ l'antidéplacement qui transforme B en A et A en O.

a) Montrer que φ est une symétrie glissante puis déterminer ses éléments caractéristiques.

b) Montrer que φ(O) = D.

c) Soit E = φ(D) , montrer que E et B sont symétriques par rapport au point O.

Exercice n°3 :

Le plan est orienté dans le sens direct. Dans la figure ci-contre, ABCD est un carré de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On désigne par E le milieu de [CD] et par F le milieu de [CB]

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que f(C) = B et f(E) = F
   b) Montrer que f est une rotation dont on précisera l'angle et le centre
   c) Déduire que f(D) = C
2) Soit g l'antidéplacement tel que g(C) = B et g(D) = C.

Montrer que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur

3) Montrer que $g = f \circ S_{(CD)}$

4) Soit I le point du plan tel que CIA soit un triangle équilatéral direct

a) Montrer que $r_{(A,\frac{\pi}{6})} = S_{(AI)} \circ S_{(AD)}$

b) Déduire la nature et les éléments caractéristiques de $h = r_{(I,\frac{\pi}{3})} \circ r_{(A,\frac{\pi}{6})}$

c) On pose $T = f \circ h$. Déterminer T(A). Donner la nature et les éléments caractéristiques de T

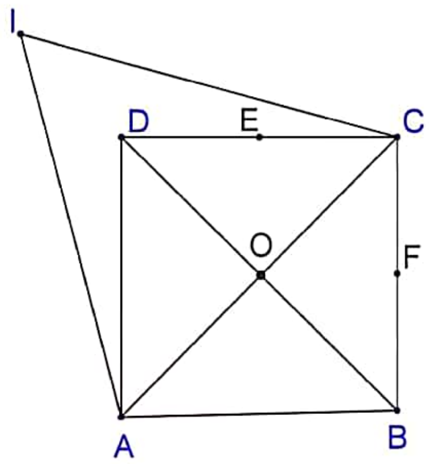
d) Déduire que $g^{-1} \circ f \circ T$ est une symétrie glissante qui transforme D en C.

5) On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

Soit ψ l'application qui à tout point M(z) associe le point M' (z') tel que $z' = -i\overline{z} + 2 + i$

a) Montrer que ψ est un antidéplacement

b) Montrer que $\psi = g$



Exercice n°4 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle en A tel que $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

On désigne par O le milieu de [BC] , par D le symétrique de A par rapport à (BC) et par Δ la droite perpendiculaire à (BC) et passant par C.

1) Montrer que le quadrilatère ABDO est un losange.

2) On désigne par f le déplacement vérifiant : f(B) = O et f < (AC) > = Δ.

a) Déterminer f < (AB) >

b) En déduire que f(A) = C

c) Montrer que f est une rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{3}$

3) On désigne par E le point tel que ODCE est un parallélogramme et I = f(C).

On désigne par r la rotation de centre I et d'angle $\frac{-\pi}{3}$ et on pose t = for.

a) Déterminer t(C) puis caractériser t.

b) Déterminer r(E). En déduire que EBI est un triangle équilatéral.

4) On désigne par K le milieu du segment [AB] et g l'isométrie définie par $g = S_O o S_{(AC)}$.

a) Déterminer la droite Δ' telle que $S_O = S_{(OD)} o S_{\Delta'}$.

b) Caractériser alors g.