LYCEE PILOTE SFAX	Série d'exercices N°	Mr MEGDICH
		4ème MATH

EXERCICE N°1

I/ Soit f la fonction définie sur $]2,+\infty[$ par $f(x)=\tan\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Montrer que f est dérivable sur $]2,+\infty[$ et déterminer $f'(x)$ pour tout $x\in]2,+\infty[$.

   b. Dresser le tableau de variation de f.

   c. Tracer C_f

2. a. Montrer que f réalise une bijection de $]2,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$.

   b. On designe par g la fonction réciproque de f. Tracer la courbe C_g de g.

   c. Montrer que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $g'(x)=\frac{-(g(x))^2}{\pi(1+x^2)}$

II/ Soit h la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} h(x)=\frac{1}{g(x)} & \text{si } x\in]0,+\infty[\\ h(0)=0 \end{cases}$

On désigne par C_h la courbe représentative de h dans un autre repère orthonormé $(O',\vec{u},\vec{v})$.

1. Montrer que h est continue sur $[0,+\infty[$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

3. Montrer que h est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $h'(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$

4. a. Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $\frac{x}{\pi}-\frac{x^3}{3\pi}<h(x)<\frac{x}{\pi}$

   b. En déduire que h est dérivable à droite en 0.

   c. On désigne par T_d la demi tangente à C_h au point d'abscisse 0.

   Déterminer la position relative de C_h et T_d. 5. Tracer C_h

EXERCICE N°2

Pour tout n de n de IN on considère la fonction f_n définie sur IR par : $f_n(x)=x^3+3(n+1)x+1$

1) montrer que f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. montrer que f_n^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$

Dans la suite de l'exercice on désigne par α_n le reel defini par $\alpha_n=f_n^{-1}(0)$

2) a) Vérifier que : $-1<\alpha_n<0$ et que $\alpha_n=\frac{-1}{\alpha_n^2+3(n+1)}$

b) montrer que $(f_n^{-1})'(0)=\frac{-\alpha_n}{3[1+2(n+1)\alpha_n]}$

3) Montrer pour tout x de $]-1,0[$ on a : $f_{n+1}(x)<f_n(x)$ déduire que α_n est croissante et que α_n converge

4) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}n\alpha_n$

EXERCICE N°3

Soit f la fonction définie sur $]0,2[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$

1) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1,2[$

a) Montrer que g réalise une bijection de $[1,2[$ sur un intervalle J que l'on précisera

b) Tracer dans le même repère la courbe (C') de g^{-1} . Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout x de J

EXERCICE N°4

Soit f la fonction définie sur $]0,\pi]$ par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+\cos x}{\sin x} & \text{si } x\in\,]0,\pi[,\\ 0 & \text{si } x=\pi.\end{cases}$

1. Montrer que f est continue à gauche en π.

2. Montrer que f est dérivable à gauche en π et $f'_g(\pi)=-\dfrac{1}{2}$.

3. Montrer que pour tout $x\in\,]0,\pi]$, $f'(x)=\dfrac{1}{\cos x-1}$.

4. Montrer que f réalise une bijection de $]0,\pi]$ sur un intervalle J à préciser.

   On note g la fonction réciproque de f.

5. a. Vérifier que pour tout $x\in\,]0,\pi]$, $f^2(x)=\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$ puis exprimer $\cos x$ en fonction de $f(x)$.

   b. Montrer que g est dérivable sur J et exprimer $g'(x)$ en fonction de x.

EXERCICE N°5

Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x)=2\sqrt{1-\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

① a) Montrer que pour tout $x\in[-1,1[$, $\dfrac{f(x)}{x-1}=-2\sqrt{\dfrac{1-\cos\left[\dfrac{\pi}{2}(1-x)\right]}{(1-x)^2}}$

b) En déduire que f est dérivable à gauche en 1 et que $f'_g(1)=\dfrac{-\pi\sqrt{2}}{2}$.

② Dresser le tableau de variation de f.

③ Tracer la courbe C_f.

④ a) Montrer que f réalise une bijection de $[-1,1]$ sur $[0,2\sqrt{2}]$.

b) Tracer la courbe de la fonction réciproque f^{-1} de f.

⑤ Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[0,2\sqrt{2}[$ et que pour tout $x\in[0,2\sqrt{2}[$, $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{-4}{\pi\sqrt{8-x^2}}$.