Lycée Pilote de Sfax A/S 2019-2020	Série N°10 Intégrales	Mr : Mourad EL arbi $4^{ème}$ Math

1 On pose pour tout entier naturel n, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2}(x)\,dx$.

① a) Calculer I_0.

b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le I_{n+1} \le I_n$.

c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.

② Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+3}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

2 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \int_0^1 \dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

① a) Montrer que (u_n) est décroissante.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

② Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}(n+1)} \le u_n \le \dfrac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

③ On pose pour tout $n \ge 3$, $I_n = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,dx$.

a) Vérifier que pour tout $n \ge 3$, $u_n + u_{n-2} = I_n$.

b) Par une intégration par parties portant sur I_n, montrer que pour tout $n \ge 3$, $nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}$.

c) En déduire que pour tout $n \ge 3$, $(2n-1)u_n \le \sqrt{2}$.

d) Montrer que pour tout $n \ge 3$, $\dfrac{n}{\sqrt{2}(n+1)} \le nu_n \le \dfrac{n\sqrt{2}}{2n-1}$. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$.

3 ① Soit f la fonction définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ par $f(x) = \tan(x)$.

a) Montrer que f réalise une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ sur $[0, 1]$.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[0, 1]$ et calculer $\left(f^{-1}\right)'(x)$.

② Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et on pose $I_n = \int_0^1 \dfrac{t^{n-1}}{1+t^{2n}}\,dt$.

a) On pose pour tout $t \in [0, 1]$, $\varphi(t) = f^{-1}\left(t^n\right)$.

Montrer que φ est dérivable sur $[0, 1]$ et calculer $\varphi'(t)$.

b) En déduire I_n en fonction de n.

③ Soit $J_n = \int_0^1 \dfrac{t^{3n-1}}{\left(1+t^{2n}\right)^2}\,dt$ avec $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

a) Montrer que $J_n = \dfrac{-1}{4n} + \dfrac{1}{2} I_n$.

b) En déduire la valeur de $A = \int_0^1 \dfrac{t + 2t^5}{\left(1+t^4\right)^2}\,dt$.