④ Soit φ la fonction sur l'intervalle $]-\infty, 0]$ par $\varphi(x) = \begin{cases} h^{-1}\left(\dfrac{x-1}{x}\right) & \text{si } x < 0 \\ -\dfrac{\pi}{4} & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

a) Montrer que φ est continue à gauche en 0.

b) Montrer que φ est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et calculer $\varphi'(x)$ pour tout $x < 0$.

c) Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 0[$ il existe un réel $c_x \in]x, 0[$ tel que $\dfrac{\varphi(x) + (\pi/4)}{x} = \dfrac{-1}{(c_x - 1)^2 + 1}$.

En déduire que φ est dérivable à gauche en 0 et déterminer $\varphi'_g(0)$.

$\boxed{3}$ Soit f la fonction définie sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \sin x$.

On désigne par **C** la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

① a) Dresser le tableau de variation de f puis tracer **C**.

b) Montrer que f réalise une bijection de $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

c) Tracer la courbe **C**′ de f^{-1}.

d) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]-1, 1[$ puis calculer $\left(f^{-1}\right)'(x)$.

② Soit (U_n) la suite définie pour $n \geq 2$ par $U_n = f^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}}\right) - f^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}}\right)$.

a) Calculer la limite de la suite (U_n).

b) Montrer qu'il existe un réel $c_n \in \left]\sqrt{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}}, \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}}\right[$ tel que $U_n = \dfrac{\frac{2}{n}}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}}} \times \dfrac{1}{\sqrt{1 - c_n^{\,2}}}$.

c) En déduire la limite de la suite (nU_n), $n \geq 2$.

d) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $\sin(U_n) = \dfrac{2}{n}$.

e) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} n f^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

$\boxed{4}$ Soit f la fonction définie sur $]0, 2[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Dresser le tableau de variation de f puis Construire C_f.

2. Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1, 2[$.

a. Montrer que g réalise une bijection de $[1, 2[$ sur un intervalle J à préciser.

b. Tracer dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe C' de g^{-1}.

c. Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

3. Soit φ une fonction dérivable sur $]0, 2[$ telle que pour tout $x \in]0, 2[$, $\varphi'(x) = f(x)$ et $\varphi(1) = 0$.

On désigne par (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ par $U_n = \varphi\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - \varphi\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)$.

a. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $\dfrac{1}{n(n+1)} f\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right) \leq u_n \leq \dfrac{1}{n(n+1)} f\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

c. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 U_n$