Lycée pilote Sfax Smaoui sofiène	**Série d'exercices n°13**	$4^{ème}$ Math

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $]-\infty,1]$ par $f(x)=\dfrac{-2}{x^2-2x+2}$ et F sa primitive sur $]-\infty,1]$ qui s'annule en 1.

1) On désigne par G la fonction définie sur $[0,\pi[$ par : $G(x)=F\left(1-\tan\dfrac{x}{2}\right)$.

a- Montrer que G est dérivable sur $[0,\pi[$ et calculer $G'(x)$.

b- Déterminer G(x) pour tout $x\in[0,\pi[$ puis calculer F(0).

2) Soit H la fonction définie sur $]-\infty,1[$ par : $H(x)=F(x)+F\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$.

a- Montrer que H est dérivable sur $]-\infty,1[$ et calculer $H'(x)$.

b- En déduire que pour tout $x\in]-\infty,1[$ on a: $F\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=\pi-F(x)$.

3) Soit u la suite réelle définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=n}^{2n}F\left(\dfrac{1}{k}\right)$.

a- Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in\{n,n+1,\ldots\ldots,2n\}$, $F\left(\dfrac{1}{n}\right)\leq F\left(\dfrac{1}{k}\right)\leq F\left(\dfrac{1}{2n}\right)$.

b- En déduire la limite de u_n en $+\infty$.

Exercice 2

Déterminer une primitive F sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=x\cos\left(1+x^2\right)$; $I=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\cos(x)\sin(2x)$; $I=\mathbb{R}$

3) $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}$; $I=\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$

4) $f(x)=\dfrac{\sin(2x)}{\left(2+\cos^2 x\right)^2}$; $I=\mathbb{R}$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $[0,\pi]$ par $f(x)=\sqrt{1+\cos x}$.

1) a) Montrer que f est une bijection de $[0,\pi]$ sur $\left[0,\sqrt{2}\right]$.

b) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur $\left]0,\sqrt{2}\right[$ et expliciter $\left(f^{-1}\right)'(x)$.

2) Soit g la fonction définie sur $\left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[$ par $g(x)=\dfrac{2}{\sqrt{2-x^2}}$.

On note G la primitive de g sur $\left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[$ telle que $G(0)=0$.

a) Montrer que G est impaire.

b) Montrer que pour tout x de $\left]0,\sqrt{2}\right[$, $G(x)=\pi-f^{-1}(x)$. En déduire $G(1)$.