Lycée pilote Sfax Smaoui sofiène	**Série d'exercices n°15**	$4^{ème}$ M

1 Calculer les intégrales suivantes.

① $\int_0^1 t(1-t^2)^3\,dt$. ② $\int_1^2 \frac{dx}{(1+3x)^3}$. ③ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$. ④ $\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$. ⑤ $\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{1}{4}} \frac{|2x-1|}{(x^2-x)^2}dx$.

2 On considère la fonction f définie sur $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ par $f(x)=\frac{1}{\sin x}$.

① Montrer que f réalise une bijection de $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

② Montrer que la réciproque f^{-1} de f est dérivable sur I et que $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, pour tout x de I.

③ En déduire l'intégrale $\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$.

3 Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x(1+\tan^2 x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = \frac{\pi}{4}$.

4 ① Montrer que $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx + \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx = \sqrt{2}$.

② En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

5 Soit (a_n) la suite définie par $a_n=(n+1)^2$, $n\geq 0$.

Pour $n>1$, on considère P_n la fonction polynôme définie par $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

① Calculer, en fonction de n, $\int_0^1 P_n(x)dx$.

② Calculer $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 P_n(x)dx$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^1 P_n(x)dx$.

6 ① Calculer $I_0=\int_0^1 \sqrt{1+t}\,dt$.

② Soit (I_n) la suite définie par $I_0=\int_0^1 \sqrt{1+t}\,dt$ et pour tout $n\geq 1$, $I_n=\int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\,dt$.

a) Calculer I_1.

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

c) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $\frac{1}{n+1}\leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$.

d) En déduire la limite de la suite (I_n).

③ a) Montrer que pour tout $x\in[0, 1]$, $0\leq\sqrt{2}-\sqrt{1+x}\leq\frac{1}{2}(1-x)$.