b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\sqrt{2}}{n+1} - \dfrac{1}{2(n+1)(n+2)} \leq I_n \leq \dfrac{\sqrt{2}}{n+1}$.

c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} nI_n$.

7 Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par $u_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}}$ et $v_n = \dfrac{u_n}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$.

① a) Montrer que pour tout entier $p \geq 1$, $\displaystyle\int_p^{p+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{p}}$.

b) Montrer que pour tout entier $p \geq 2$, $\displaystyle\int_{p-1}^{p} \frac{dx}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{p}}$.

c) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $-2 + 2\sqrt{n+1} \leq u_n \leq -1 + 2\sqrt{n}$.

② Déterminer les limites éventuelles des suites (u_n) et (v_n).

8 On donne le tableau de variation d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

① déterminer le sens de varaiation de F.

② Montrer que $1 \leq F(2) \leq 4$.

③ a) Montrer que pour tout réel $x \geq 1$, $F(x) \geq x - 1$.

b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

④ Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\,dt$.

a) Dresser le tableau de variation de g.

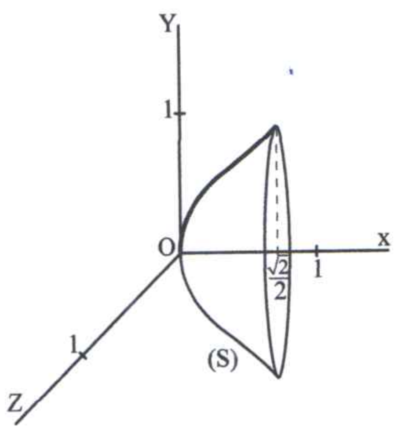
b) Déterminer la nature de la branche infine de la courbe de g.

9

Dans la figure ci-contre, le solide de révolution (S) est obtenu en faisant tourner la portion de la courbe d'équation

$y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{1-x^4}}$, $x \in \left[0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ autour de l'axe (OX).

Le but de cet exercice est de calculer le volume de ce solide.



1. Soit F la fonction définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{\sin x}} \frac{t}{\sqrt{1-t^4}}\,dt$

a. Montrer que F est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

b. Montrer que F est dérivable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et déterminer $F'(x)$ pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

2. Exprimer $F(x)$ en fonction de x, pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

3. Conclure.