3

Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x)=\int_x^{2x}\frac{1}{\ln t}\,dt$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

① Montrer que la fonction f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que pour tout réel x de $]1,+\infty[$,

$$f'(x)=\frac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{\ln(2x).\ln x}.$$

② a) Montrer que pour tout réel x de $]1,+\infty[$, $\frac{x}{\ln(2x)}\le f(x)\le\frac{x}{\ln x}$.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. Interpréter le résultat.

③ a) Montrer pour tout réel t de $[1,+\infty[$, $\ln t\le t-1$.

b) En déduire que pour tout réel x de $]1,+\infty[$, $f(x)\ge\ln\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)$.

c) Déterminer alors $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$. Interpréter le résultat.

④ a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Tracer l'allure de la courbe C_f de f. (On donne $f(2)\simeq1.9$).

4

Soit f la fonction définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^2}$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ et que $f'(x)=\frac{-\ln x-2}{x^2(\ln x)^3}$.

b. Dresser le tableau de variation de f.

c. Tracer C_f.

2. Soit α et β deux réels tels que $1<\alpha<\beta$. On désigne par :

$\mathcal{A}_1$ l'aire de la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=\beta$.

$\mathcal{A}_2$ l'aire de la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\frac{1}{\beta}$ et $x=\frac{1}{\alpha}$.

a. Comparer $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$.

b. Hachurée les parties correspondantes à $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ lorsque $\alpha=2$ et $\beta=e^2$.