Lycée pilote de Tunis	**fonctions réciproques 1**	Terminales Maths & sexp
Mr Ben Regaya. A	**+ Eléments de corrections**	www.ben-regaya.net

Exercice 1

Une seule des trois réponses est correcte. Cocher la bonne en justifiant.

Soit f une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et $g(x)=f(x)+c$ où c est une constante réelle. On désigne par f^{-1} et g^{-1} les fonctions réciproques de f et g alors on a :

☐ $g^{-1}(x)=f^{-1}(x)+c$ ☐ $g^{-1}(x)=f^{-1}(x+c)$ ☐ $g^{-1}(x)=f^{-1}(x-c)$

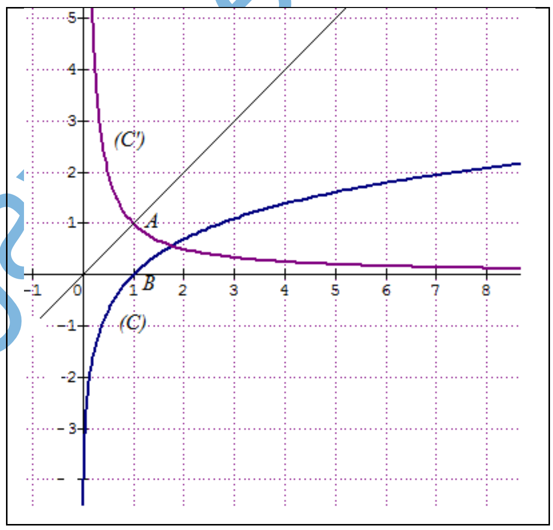
Exercice 2

Dans la figure ci- contre on donne les courbes (C) et (C') d'une fonction f dérivable sur $]0,+\infty[$ et sa dérivé f'.

On donne les points A et B de coordonnées respectives $(1,1)$ et $(1,0)$ et on note (T) la tangente à (C) au point $B(1,0)$

Répondre par **vrai ou faux**. **Justifier**

1. La droite (T) est parallèle à la droite (OA).
2. f est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
3. f^{-1} est dérivable en 0 et $\left(f^{-1}\right)'(0)=1$.
4. La fonction f^2 est décroissante sur $]0,1]$.



Exercice 3

A- Soit la fonction f définie sur $[0,2[$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2x-x^2}} & si\ 0 \prec x \prec 2 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1. a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en zéro.

   b) Etudier les variations de f sur $]0,2[$.
2. Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur $[0,+\infty[$.
3. a) Montrer que pour tout $x\in[0,2[\ :\ f(x)\geq x$.

   b) Tracer dans un même repère orthonormé, les courbes représentatives (C) et (C') de f et g .On précisera la demi-tangente au point d'abscisse zéro.
4. Soit n un entier naturel non nul.

   a)Montrer que l'équation $f(x)=\dfrac{1}{n}$ admet dans $[0,2[$ une solution unique α_n.

   b) Montrer que la suite (α_n) est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

c) Déterminer la limite de (α_n).

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $]0,2[$ par: $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ .On désigne par (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Dresser le tableau de variation de f.

   b) Construire (C).

2. Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1,2[$.

   a) Montrer que g réalise une bijection de l'intervalle $[1,2[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

   b) Tracer dans le même repère la courbe (C') de g^{-1}.

   c) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour $x\in J$.

3. Soit h une fonction continue sur $[0,2]$ dérivable sur $]0,2[$ telle que pour tout $x\in]0,2[$, $h'(x)=f(x)$ et $h(1)=0$. On désigne par (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=h\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-h\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)$.

   a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

   b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n(n+1)}f\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)\le u_n\le\dfrac{1}{n(n+1)}f\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$;

   c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2u_n$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{1}{2}\right[$ par $f(x)=\dfrac{1}{cos(\pi x)}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\left[0,\dfrac{1}{2}\right[$ sur $[1,+\infty[$.

2. a) Calculer $f^{-1}(2)$.

   b) Préciser le domaine de dérivabilité de f^{-1} et expliciter $\left(f^{-1}\right)'(x)$.

3. Soit g la fonction définie sur $[1,\sqrt{2}[$ par $g(x)=\dfrac{x^2}{2-x^2}$.

   a) Etudier les variations de g.

   b) Soit φ la fonction définie sur $[1,\sqrt{2}[$ par : $\varphi(x)=2(f^{-1})(x)-f^{-1}(g(x))$.

   Montrer que φ est dérivable sur $]1,\sqrt{2}[$ et vérifier que $\varphi'(x)=0$

   c) En déduire que $\varphi(x)=0$.

Lycée pilote de Tunis	fonctions réciproques 1	Terminales Maths & S-exp
Mr Ben Regaya. A	Eléments de corrections	www.ben-regaya.net

Exercice 1

On a : $g(x)=f(x)+c=\varphi\circ f(x)$ avec $\varphi(x)=x+c$.

f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Donc g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et on a : $g^{-1}(x)=f^{-1}\circ\varphi^{-1}(x)=f^{-1}\left(\varphi^{-1}(x)\right)=f^{-1}(x-c)$.

Exercice 3

1. a) Pour $0\prec x\prec 2$, $\quad f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2x-x^2}}=\dfrac{x\sqrt{2x-x^2}}{2x-x^2}=\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{2-x}$.

   $\lim\limits_{x\to 0^+} 2x-x^2=0\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{2x-x^2}=0$ et donc par quotient $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0=f(0)$ donc f est continue à droite en 0.

   $0\prec x\prec 2$, $\quad \dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ et donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$. f n'est pas dérivable à droite en 0.

   b) f est dérivable sur $]0,2[$ et $\forall x\in]0,2[$, $f'(x)=\dfrac{\sqrt{2x-x^2}-x\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}}{\left(2x-x^2\right)}=\dfrac{2x-x^2-x(1-x)}{\left(2x-x^2\right)\sqrt{2x-x^2}}$

   $=\dfrac{x}{\left(2x-x^2\right)\sqrt{2x-x^2}}\succ 0$ donc f est strictement croissante sur $[0,2[$ et elle croit de $[0,2[$ vers

   $f\left([0,2[\right)=\left[f(0),\lim\limits_{x\to 2^-} f\right[=[0,+\infty[$.

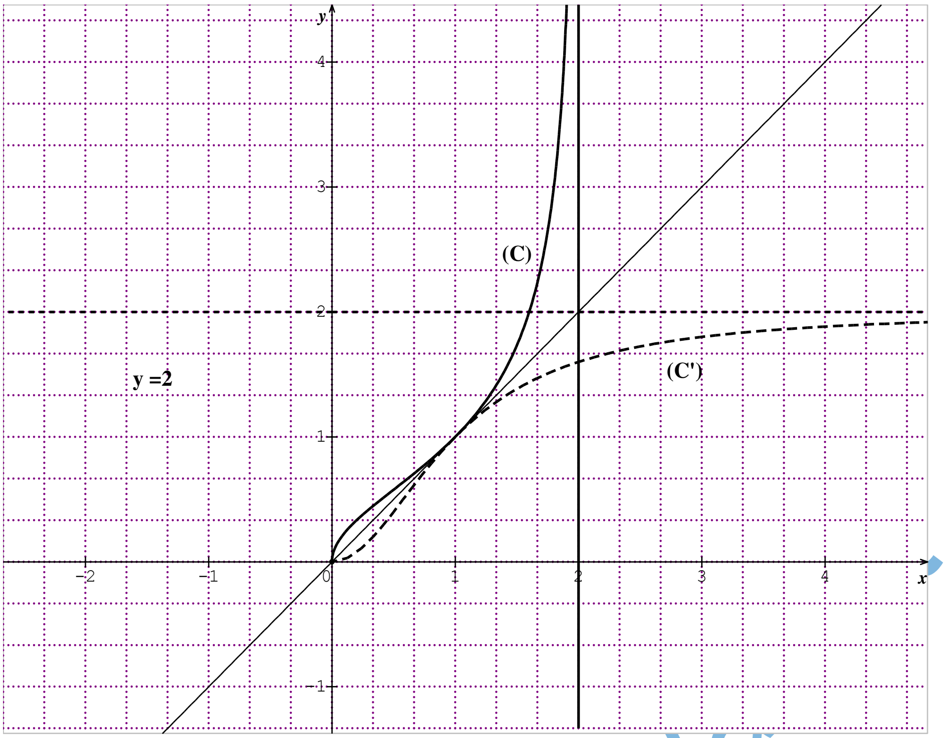
2. f est continue et elle est strictement croissante sur $[0,2[$ donc f réalise une bijection de cet intervalle sur son image à savoir $[0,+\infty[$. f admet alors une fonction réciproque g définie sur $[0,+\infty[$ et on a :

   $f(x)=y;\ x\in[0,2[\Leftrightarrow x=g(y);\ y\in[0,+\infty[$.

3. a) Pour $x\in[0,2[$: $f(x)-x=\dfrac{x}{\sqrt{2x-x^2}}-x=x\left(\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}-1\right)=x\left(\dfrac{1-\sqrt{2x-x^2}}{\sqrt{2x-x^2}}\right)=$.

   $x\left(\dfrac{1-2x+x^2}{\sqrt{2x-x^2}\left(1+\sqrt{2x-x^2}\right)}\right)=\dfrac{x(1-x)^2}{\sqrt{2x-x^2}\left(1+\sqrt{2x-x^2}\right)}\geq 0$. Donc pour tout x réel de $[0,2[$; $f(x)\geq x$.

   b) Les courbes représentatives (C) et (C') de f et g.



4. a) On sait que f est une bijection de $[0,2[$ dans $f([0,2[)=[0,+\infty[$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \in f([0,2[)$ donc l'équation $f(x)=\frac{1}{n}$ admet dans $[0,2[$ une solution unique α_n. On a donc $f(\alpha_n)=\frac{1}{n}$.

   b) $f(\alpha_n)=\frac{1}{n}$ et $f(\alpha_{n+1})=\frac{1}{n+1}$ d'où $f(\alpha_{n+1}) \prec f(\alpha_n) \Leftrightarrow \alpha_{n+1} \prec \alpha_n$ car f est strictement décroissante sur $[0,2[$. La suite (α_n) est décroissante.

   La suite (α_n) est décroissante et elle minorée par zéro donc elle converge.

   c) On a $f(\alpha_n)=\frac{1}{n} \Leftrightarrow \alpha_n = g\left(\frac{1}{n}\right)$ et g est continue en 0 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g\left(\frac{1}{n}\right)=g(0)=0$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

Exercice 4

1. f est dérivable sur $]0,2[$ et $f'(x)=\dfrac{-\dfrac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}}{(2x-x^2)}=\dfrac{x-1}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}}$.

   la fonction dérivée s'annule en 1 et elle croit de $[1,2[$ vers son image $[1,+\infty[$ et elle décroit de $]0,1]$ vers on image $[1,+\infty[$.

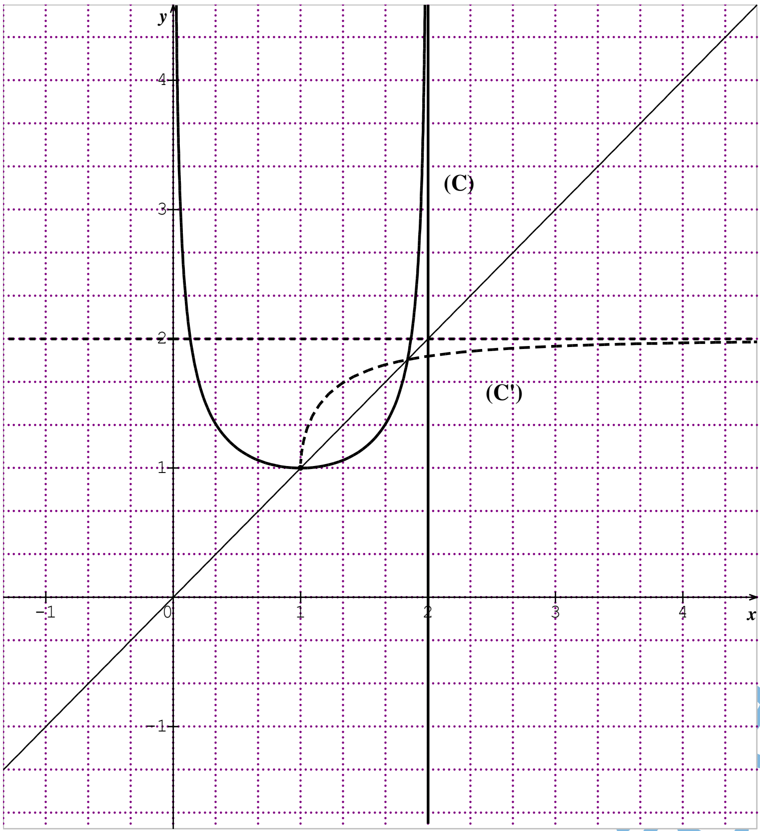
   b) plus tard.

2. a) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1,2[$.

   g est continue et elle est strictement croissante sur $[1,2[$ donc g réalise une bijection de l'intervalle $[1,2[$ sur son image $J=[1,+\infty[$.

   On a $f(y)=x,\ x\in[1,2[\Leftrightarrow y=g^{-1}(x),\ y\in[1,+\infty[$.

   b)



c) Résolvons pour $x \in [1,2[$ l'équation d'inconnue y : $f(y)=x$

$$f(y)=x \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2y-y^2}}=x \Leftrightarrow 2y-y^2=\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow y^2-2y+\frac{1}{x^2}=0$$

$\Delta'=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$ et donc deux solutions $y_1=1+\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2}}=1+\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ et $y_2=1-\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2}}=1-\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

Remarquons que $y_2 \prec 1$ donc ne convient pas et par suite $\forall x \in [1,+\infty[,\ g^{-1}(x)=1+\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

3. a) Pour n entier naturel non nul, les réels $1+\dfrac{1}{n}$ et $1+\dfrac{1}{n+1}$ sont dans l'intervalle $[0,2]$ et h est continue sur cet intervalle donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[h\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-h\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)\right]=h(1)-h(1)=0$

b) h étant continue sur $[0,2]$ dérivable sur $]0,2[$ et pour n entier naturel non nul, les réels $1+\dfrac{1}{n}$ et $1+\dfrac{1}{n+1}$ sont dans l'intervalle $[1,2[$ et si x est un réel vérifiant $1+\dfrac{1}{n+1}\le x\le 1+\dfrac{1}{n}$ alors

$f\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)\le f(x)\le f\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ car f est strictement croissante sur $[1,2[$ mais comme pour tout $x \in]0,2[$,

$h'(x)=f(x)$ cette double inégalité s'écrit $h'\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)\le h'(x)\le h'\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

Résumons donc :

h est continue sur $[0,2]$ dérivable sur $]0,2[$ et pour $x \in \left[1+\frac{1}{n+1}, 1+\frac{1}{n}\right]$, $h'\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \le h'(x) \le h'\left(1+\frac{1}{n}\right)$

alors d'après le théorème des inégalités des accroissements finis

$\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\times h'\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \le h\left(1+\frac{1}{n}\right)-h\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \le \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\times h'\left(1+\frac{1}{n}\right)$ ou tout simplement encore

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)} f\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \le u_n \le \frac{1}{n(n+1)} f\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

On a : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)} f\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \le u_n \le \frac{1}{n(n+1)} f\left(\frac{n+1}{n}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{n^2}{n(n+1)} f\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \le n^2 u_n \le \frac{n^2}{n(n+1)} f\left(\frac{n+1}{n}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n(n+1)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} f\left(1+\frac{1}{n}\right) = f(1) = 1$ et

$\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} f\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = f(1) = 1$. Alors par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = 1$.

Exercice 5

$cos(\pi x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

1. f est restriction à $\left[0,\frac{1}{2}\right[$ d'une fonction dérivable en tout réel différent de $\frac{1}{2}+k$, $k \in \mathbb{Z}$ donc f est dérivable sur $\left[0,\frac{1}{2}\right[$ et $f'(x) = \frac{\pi sin(\pi x)}{cos^2(\pi x)} \ge 0$

   f est alors strictement croissante sur $\left[0,\frac{1}{2}\right[$ comme elle est continue alors elle réalise une bijection de $\left[0,\frac{1}{2}\right[$ sur $f\left(\left[0,\frac{1}{2}\right[\right) = \left[f(0); \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x)\right[= [1;+\infty[$.

2. a) $f^{-1}(2) = x$; $x \in \left[0,\frac{1}{2}\right[\Leftrightarrow f(x) = 2 \Leftrightarrow cos(\pi x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \pi x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

   $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} + 2k \\ x = -\frac{1}{3} + 2k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$. x étant un réel de $\left[0,\frac{1}{2}\right[$ alors $f^{-1}(2) = \frac{1}{3}$.

b) f est dérivable sur $\left[0,\frac{1}{2}\right[$ et f' ne s'annule pas sur$\left]0,\frac{1}{2}\right[$ alors f^{-1} est dérivable sur $f\left(\left]0,\frac{1}{2}\right[\right)=\left]1,+\infty\right[$ et pour tout réel x de $\left]1,+\infty\right[$, $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'(y)}$ avec $y=f^{-1}(x)$

Pour $y\in\left[0,\frac{1}{2}\right[$ $f'(y)=\frac{\pi \sin(\pi y)}{\cos^2(\pi y)}$ et $y=f^{-1}(x)\Leftrightarrow x=f(y)=\frac{1}{\cos(\pi y)}$ ou encore que $\cos(\pi y)=\frac{1}{x}$

Or $\sin(\pi y)=\pm\sqrt{1-\cos^2(\pi y)}\Rightarrow \sin(\pi y)=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{x}\sqrt{x^2-1}$ $\left(\pi y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right.$ donc $\left.\sin(\pi y)\geq 0\right)$

Ainsi $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

3\. a) g est restriction à $\left[1,\sqrt{2}\right[$ d'une fonction rationnelle dérivable sur $\left]-\sqrt{2};\sqrt{2}\right[$ donc g est dérivable sur $\left[1,\sqrt{2}\right[$

et $\forall x\in\left[1,\sqrt{2}\right[$, $g'(x)=\frac{4x}{\left(2-x^2\right)^2}\succ 0$

x	1		$\sqrt{2}$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$

b) On sait que f^{-1} est dérivable sur $\left]1,+\infty\right[$ .g est dérivable sur $\left]1,\sqrt{2}\right[$ et $g\left(\left]1,\sqrt{2}\right[\right)=\left]1,+\infty\right[$ donc $f^{-1}\circ g$ est dérivable

sur $\left]1,\sqrt{2}\right[$.

$\varphi=f^{-1}-f^{-1}\circ g$ est dérivable sur $\left]1,\sqrt{2}\right[$ et $\forall x\in\left[1,\sqrt{2}\right[$ $\varphi'(x)=\left(f^{-1}\right)'(x)-\left(f^{-1}\circ g\right)'(x)$

$\Rightarrow$ $\varphi'(x)=\left(f^{-1}\right)'(x)-\left(f^{-1}\right)'\left(g(x)\right)\times g'(x)$ on obtient $\varphi'(x)=0$ (trop de calcul…)

$\varphi'(x)=0$ $\forall x\in\left]1,\sqrt{2}\right[$ donc φ est une constante. Ainsi $\varphi(x)=\varphi(1)=0$. Conclusion $\forall x\in\left]1,\sqrt{2}\right[$; $\varphi(x)=0$.