~ Janvier 2021 ~ ~ Quatrième maths ~ ~ Lycée Al-Emtiez Moulares ~ ~ Issaoui Hacen ~

❖ Feuille d'exercices ❖

Fonctions réciproques

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

A. 1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}^3}$.

2) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$.

3) Tracer $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ dans le même repère.

4) Montrer que $\forall x\in]-1,1[$: $f^{-1}(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

B. Soit g la fonction définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $g(x)=1+f^{-1}(\sin x)$.

1) Montrer que $\forall x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, : $g(x)=1-\tan x$.

2) Montrer que g réalise une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x\in\mathbb{R}$ ona : $\left(g^{-1}\right)'(x)=-\dfrac{1}{1+(x-1)^2}$.

C. Soit h la fonction définie sur $]-\infty,0[$ par $h(x)=g^{-1}(1+x)+g^{-1}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

1) a) Montrer que h est dérivable sur $]-\infty,0[$ et Calculer $h'(x)$.

b) Calculer $h(-1)$ et en déduire que $\forall x\in]-\infty,0[$, $h(x)=\dfrac{\pi}{2}$.

2) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on considère les suites $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[g^{-1}\left(\dfrac{1}{k}\right)+g^{-1}\left(-\dfrac{1}{k}\right)\right]$ et $v_n=\dfrac{u_n}{n}$.

a) Vérifier que $h\left(\dfrac{-k}{k+1}\right)=g^{-1}\left(\dfrac{1}{k+1}\right)+g^{-1}\left(-\dfrac{1}{k}\right)$.

b) Montrer alors que $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $u_n=(n-1)\dfrac{\pi}{2}+g^{-1}\left(-\dfrac{1}{n}\right)$.

c) En déduire que la suite v est convergente et calculer sa limite.

Exercice 2

Soit la fonction définie sur $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$ par $f(x)=1+\sin(\pi x)$. On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0,2]$.

b) la fonction f^{-1} est elle dérivable à droite en 0 ? à gauche en 2 ?

c) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0,2[$ et $\forall x \in]0,2[$: $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{2x-x^2}}$.

2) Soit la fonction définie sur $[0,2]$ par $g(x) = f^{-1}(2-x) + f^{-1}(x)$.

a) Montrer que g est dérivable sur $]0,2[$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0,2[$.

b) Déduire que pour tout $x \in [0,2]$, on a :

$$f^{-1}(2-x) + f^{-1}(x) = 0. \qquad (1)$$

c) Interpréter graphiquement le résultat (1).

3) Soit la suite de terme général $\mathcal{U}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f^{-1}\left(1+\dfrac{1}{n+k}\right)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left(1+\frac{1}{n}\right) f^{-1}\left(1+\frac{1}{2n}\right) \leq \mathcal{U}_n \leq \left(1+\frac{1}{n}\right) f^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

b) Déduire que la suite $(\mathcal{U}_n)$ converge et calculer sa limite.

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$.

1) Montrer que f est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et que pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) = \dfrac{1}{1-\sin x}$.

2) Montrer que f réalise une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $]0,+\infty[$.

3) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x > 0$, $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$.

4) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = f^{-1}(x) + f^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

a) Montrer que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et déterminer sa fonction dérivée.

b) En déduire l'expression de $g(x)$ pour tout x de $]0,+\infty[$.

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$.

1) Etudier les variations de f.

2) Pour tout x de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on pose $g(x) = f(\tan x)$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $]1,+\infty[$.

(b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que $\forall x \in]1,+\infty[$:

$$\left(g^{-1}\right)'(x) = \frac{-2x}{1+(x^2-1)^2}.$$

3 Pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, on pose $\varphi(x) = g^{-1}\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right) + g^{-1}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}\right)$.

(a) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $\varphi'(x)$, pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Calculer $g^{-1}(\sqrt{2})$ et déduire que pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, ona : $\varphi(x) = \frac{\pi}{2}$.

4 Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $\mathcal{V}_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} g^{-1}(k)$.

(a) Montrer que $g^{-1}(2n) \leq \mathcal{V}_n \leq g^{-1}(n)$.

(b) En déduire que $(\mathcal{V}_n)$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 5

Soit la fonction f définie sur $\mathcal{I} =]0,4[$ par $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{4x-x^2}}$.

1 (a) Dresser le tableau de variation de f.

(b) Vérifier que le point $A(2,0)$ est un centre de symétrie pour $\mathscr{C}_f$ et donner une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathscr{C}_f$ en A.

(c) Construire $\mathcal{T}$ et $\mathscr{C}_f$.

2 (a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathcal{I}$ dans $\mathbb{R}$. On pose $g = f^{-1}$.

(b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $g(x) = 2\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

(c) Tracer dans le même repère $\mathscr{C}_g$.

3 Soit la fonction h définie sur $\mathcal{J} = [0,\pi]$ par : $\begin{cases} h(x) = g\left(\frac{1}{\tan x}\right) & \text{si } x \in]0\pi[. \\ h(0) = 4. \\ h(\pi) = 0. \end{cases}$

(a) Montrer que h est continue sur $\mathcal{J}$

(b) Vérifier que pour tout $x \in \mathcal{J}$, on a : $h(x) = 2(1+\cos x)$.

(c) Montrer que h réalise une bijection de $\mathcal{J}$ sur un intervalle $\mathcal{K}$ à préciser. On note $\mathcal{H} = h^{-1}$

(d) Montrer que $\mathcal{H}$ est dérivable sur $\mathcal{I}$ et que $\forall x \in \mathcal{I}$, $\mathcal{H}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}$.

4 On pose $\mathcal{F}(x) = \mathcal{H}(x) - \mathcal{H}(4-x)$ pour tout $x \in [0,4]$.

(a) Montrer que $\mathcal{F}$ est continue sur $[0,4]$ et dérivable sur]0,4[et calculer $\mathcal{F}'(x)$ pour tout $x \in]0,4[$.

(b) En déduire que $\forall x \in [0,4]$ on a $\mathcal{H}(x) - \mathcal{H}(4-x) = \pi$

Exercice 6

Soient $f(x)=\dfrac{1}{\cos x-2}$, $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$ et $g(x)=\cos x-\left(\dfrac{2x+1}{x}\right)$, $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},0\right[$.

1 **a** Dresser le tableau de variations de g.

b En déduire que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution $\lambda\in\left]-\dfrac{\pi}{2},0\right[$.

2 **a** Montrer que f est bijective de $\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$ dans un intervalle $\mathcal{J}$ à préciser.

b Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur $\mathcal{J}$ et calculer $\left(f^{-1}\right)'(x)$ sur le domaine où f^{-1} est dérivable.

c Construire dans le même repère $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$

3 **a** Etant dans $\mathcal{J}$, exprimer en fonction de x, $\cos\left(f^{-1}(x)\right)$ et $\sin\left(\left(f^{-1}(x)\right)\right.$.

b En déduire $f^{-1}\left(-\dfrac{2}{3}\right)$ et $f^{-1}\left(\dfrac{1}{\sin x-2}\right)$.

4 On définie la fonction $\mathcal{H}$ par $\mathcal{H}(x)=\sqrt[3]{|f(x)|}$.

a Etudier les variations de $\mathcal{H}$ et déduire que $\mathcal{H}$ admet une réciproque $\mathcal{H}^{-1}$.

b Etudier la dérivabilité de $\mathcal{H}^{-1}$ et calculer $\left(\mathcal{H}^{-1}\right)'(x)$ pour tout $x\in\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}},1\right[$.